Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение дополнительного образования детей
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ДЕТСКИЙ ЭКОЛОГО-БИОЛОГИЧЕСКИЙ ЦЕНТР»

Р.Р. Усманов, Е.Т. Прошина

Особенности статистической обработки полевого опыта

Учебно-методическое пособие

Москва
2013

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение дополнительного образования детей
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ДЕТСКИЙ ЭКОЛОГО-БИОЛОГИЧЕСКИЙ ЦЕНТР»

Р.Р. Усманов, Е.Т. Прошина

Особенности статистической обработки полевого опыта

Учебно-методическое пособие

Москва
2013

УДК 57.087.1:631.5
ББК 74.200.585.02:22.172
У–75

Печатается по решению методического совета Федерального детского эколого-биологического центра

Усманов Р.Р., Прошина Е.Т. Особенности статистической обработки полевого опыта: Учебно-методическое пособие – М.: ФГБОУ ДОД ФДЭБЦ, 2013. – 96 с.

Ответственный редактор: Каплан Б.М., методист ФГБОУ ДОД ФДЭБЦ

Основная задача настоящего учебно-методического пособия — помочь юным опытникам и их руководителям в применении некоторых основных методов математической статистики для оценки и интерпретации результатов наблюдений и различных экспериментов. Математическая статистика позволяет извлечь максимум информации из исходных данных: оценить параметры генеральной совокупности, проверить статистические гипотезы, определить зависимости между признаками и самое главное — спланировать эксперимент (опыт).

Пособие адресовано заведующим учебно-опытными участками общеобразовательных учреждений, руководителям ученических производственных бригад, педагогам дополнительного образования трудовых объединений школьников, которые занимаются опытнической и исследовательской работой в области сельского хозяйства.

ОГЛАВЛЕНИЕ:

Введение. Применение математической статистики в агрономических исследованиях

Обработка цифровых данных агрономических исследований, например полевых и вегетационных опытов, наблюдений, учетов и анализов, включает в себя агрономический анализ полученных материалов, первичную цифровую обработку и статистическую оценку результатов исследований.

Критический обзор данных об урожаях, данных лабораторных и полевых наблюдений, анализ методики и техники проведения опыта, а также освобождение первичных данных от описок и других неточностей называется *агрономическим анализом*. Его делает исследователь, который проводил данный опыт и систематически наблюдал за ростом и развитием растений. Опыты, где допущены нарушения методики и техники, грубые ошибки, искажающие агрономическую сущность изучаемых приемов, не представляют ценности. Такие опыты обычно бракуют.

Эксперимент (опыт) является важнейшим средством получения новых знаний во всех областях знаний. В результате опытной работы исследователь получает большое количество данных, без систематизации которых не удается сделать аргументированные выводы. Статистическая обработка экспериментальных данных направлена, как правило, на построение математической модели исследуемого объекта или явления, а также на получение ответа на вопрос: «Достоверны ли полученные опытные данные в пределах требуемой точности или допусков?».

Количественные данные, полученные в опытах, не всегда реально отражают существующие различия, так как на результаты опыта влияет присущая живым организмам широкая изменчивость и разные случайные факторы. Правильно решить вопрос о том, являются ли наблюдаемые в опыте различия *закономерными* (объективными, отражающими повторяющуюся при определенных условиях существенную связь явлений в природе) или *случайными*, можно, применив к этим данным методы математической статистики.

Математическая статистика – раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Она опирается на *теорию вероятностей* – науку, изучающую закономерности массовых случайных явлений. Математическая статистика позволяет делать умозаключения обо всей (генеральной) совокупности на основе наблюдений над выборкой. Применительно к биологическим объектам ее называют *биометрией*. Результаты опытов без соответствующей математической обработки не вызывают доверия, такие данные не могут быть рекомендованы для внедрения в производство, поэтому любой эксперимент завершается статистической обработкой полученных данных. При вычислениях, наряду с калькуляторами, рекомендуется использовать компьютеры с пакетами прикладных программ для статистической обработки данных: «EXCEL», «STATISTICA», «STATGRAPHICS *Plus for Windows*» и др.

Можно выделить три основных области применения математических методов в агрономических исследованиях.

Первая область – это моделирование. Математическое моделирование – один из основных инструментов системного анализа, позволяющий в ряде случаев избежать трудоемких и дорогостоящих натурных экспериментов. На основе результатов прогнозирования динамики геосистем решаются вопросы рационального применения удобрений и средств защиты растений, проведения комплексной мелиорации и окультуривания полей, оптимизации структуры землепользования и другие. Ведутся исследования в области организации «ландшафтного земледелия» – оптимизации сельскохозяйственного использования земель в зависимости от местных условий (рельефа, климата, почвенных условий, размещения других хозяйственных объектов). Математическая модель призвана имитировать поведение параметров изучаемых систем в заданных условиях. Сама же математическая модель в зависимости от целей эксперимента (исследование, управление, контроль) может быть использована для разных целей: для предметно-смыслового анализа объекта или явления, прогнозирования их состояния в разных условиях функционирования, управления ими в конкретных ситуациях, оптимизации отдельных параметров, а также для решения каких-то других специфичных задач. Особенно важна тщательная математическая обработка результатов экспериментов, подтверждающая теоретические выводы.

Вторая область применения математики в сельскохозяйственном опыте – это анализ разнообразных явлений, так как многие процессы и явления зачастую могут быть обнаружены только после серьезной аналитической части работы. Многие явления, вообще, становятся видны только после математической обработки. Так, например, без математических методов зачастую совершенно невозможно увидеть взаимосвязь каких-то процессов. Третья область – это доказательство с помощью математических методов наличия тех или иных закономерностей.

Третья и отчасти вторая задачи чаще всего появляются в исследовательских, опытнических работах учащихся. Надеемся, что данное пособие поможет опытникам применять некоторые основные методы математической статистики для оценки и интерпретации результатов наблюдений и различных экспериментов.

Изменчивость признаков

Все изучаемые биологические объекты обладают двумя свойствами. Это, прежде всего, их *большая численность*: так на одном квадратном метре произрастает 400–500 растений пшеницы, ячменя или овса, а на площади 1 га – 4-5 млн. растений; если же речь идет о мелкосемянных культурах, их на этой площади может быть свыше 10 млн. растений. Помимо большой численности биологические объекты отличаются от других рядом признаков – высотой, массой, окраской, качеством и т.д. Каждый из признаков может иметь у различных особей разную степень выраженности, поэтому говорят, что признаки *варьируют*.

Свойство биологических объектов отличаться друг от друга по каким-то признакам даже в однородных совокупностях называется *изменчивостью* или *варьированием*. Это свойство присущее для всего живого: двух совершенно одинаковых предметов не существует в природе, хотя различия между ними на первый взгляд могут быть трудно отличимыми.

Даже при самой тщательной и аккуратной работе на опытном поле или в вегетационном опыте (теплице) урожаи одного и того же варианта (сорта) на параллельных делянках или сосудах всегда получаются разными. Эти различия вызваны сочетанием как наследственных факторов (растения одного и того же сорта всегда отличаются своей наследственностью), так и внешних условий, не всегда поддающихся учету. Поэтому эти различия в опытном деле определяют как следствие случайных причин и их относят к неизучаемым *(случайным)*.

В зависимости от характера исследуемого признака различают *количественную изменчивость*, которая может быть измерена (различия между вариантами выражаются количественно: массой, высотой, урожаем, числом цветков, числом зерен: то есть показателями, которые можно непосредственно измерить или сосчитать) и *качественную*, которая не поддается измерению.

Различают два вида количественной изменчивости – *прерывистую (дискретную)* и *непрерывную*.

Прерывистая количественная изменчивость

Если значения изучаемых признаков определяются путем подсчета и не имеют единиц измерения, то мы имеем дело с *прерывистой (дискретной)* изменчивостью. Различия между объектами в этом случае выражаются целыми числами, между которыми нет и не может быть переходов.

Примерами прерывистой (дискретной) изменчивости служат: количество зерен, побегов, корней, почек, усов, цветков, кистей, продуктивных стеблей, плодов, количество больных растений, засоренность посевов в баллах, численность вредителей и густота стеблестоя в шт/м^2 и т.д.

При подсчете числа клубней в кусте картофеля обнаружено 12 клубней, и сколько бы раз мы не пересчитывали число клубней, это число будет одним и тем же – это типичный пример *количественной прерывистой изменчивости*.

Непрерывная количественная изменчивость

Если единицами измерения значений изучаемых признаков, являются меры массы, объема, длины и т.д. и между отдельными значениями мыслимы любые переходы с неограниченным числом возможных значений (все зависит от точности измерений), то такая изменчивость является *непрерывной*.

Примеры непрерывной количественной изменчивости: высота растений, длина побегов, корней, окружность (диаметр) штамба и диаметр кроны в см (м); масса растений (г, кг, ц, т); площадь листьев и поглощающей поверхности корней в см^2 (м^2); плотность, г/см^3 (т/м^3), пораженность в %, содержание питательных веществ в почве в мг/100 г. и их запасы кг/га, и т.д. Так, например, масса одного и того же клубня в зависимости от применяемых весов может быть 87 г, 87,5 г, 87,54 г, 87,545 г и т.д.

Качественная изменчивость

Качественной изменчивостью называется варьирование, при котором различия между вариантами выражаются качественными показателями, которые не поддаются непосредственному измерению. В основе качественной изменчивости лежит распределение общей численности объектов на 2 или большее число групп и определение *частоты встречаемости* или *доли признака*.

Если распределить клубни на 3 фракции (группы): мелкие, средние и крупные, а затем подсчитать численность по каждой группе (с последующим отнесением их к общему числу), то это пример *качественной изменчивости*.

Примеры дискретных переменных качественной изменчивости номинальной шкалы: тип плодоношения яблонь, окраска (красная, желтая, розовая, бурая, зеленая), форма плодов томатов, фракции клубней картофеля (крупные, средние, мелкие). Если признак принимает два взаимоисключающих друг друга значения, то изменчивость называют *альтернативной*, или *двояковозможной*. Например, растения: больные и здоровые; плоды (клубни): товарные (семенные) и нетоварные, (столовые или технические); колосья: остистые и безостые; огурцы: стандартные и нестандартные; розы: с шипами и без шипов.

Рейтинговая (порядковая) изменчивость

Рейтинговая (порядковая) качественная изменчивость исчисляется числами ранга, рейтинга или балла на основе визуальной оценки, дегустации, учетов или подсчетов. Каждый балл может отражать определенное количество или соотношение растений, вредителей; площадь проективного покрытия, вкусовые достоинства продукта (дегустационная оценка), уровень цветения (завязывания плодов), зимостойкости или содержать другой разъяснительный комментарий. Например, визуальная (глазомерная) шкала засоренности посевов в баллах: 1 – очень слабая, 2 – слабая, 3 – средняя, 4 – сильная и 5 – очень сильная, где 1 – отражает единичную засоренность (менее 10%), 2 – до 25, 3 – 50, 4 – 100 и 5 более 100%, т.е. сорняки преобладают (за 100% берут визуальную численность культурных растений).

В баллах можно выразить и результаты количественной изменчивости, например содержание обменного калия в пахотном слое почвы: 1 – низкая обеспеченность (до 50 мг K_2O на 1 кг почвы); 2 – средняя (до 150 мг) и 3 – высокая (свыше 150 мг).

При оценке рангами число самих рангов равняется численности выборки (выборок), поскольку рангом отдельного значения является его порядковый номер в ранжированном ряду.

Номинальная шкала может быть трансформирована в порядковую и наоборот, когда численностям объектов присваивают баллы, а затем придают атрибутивный характер, или номинал: слабая, средняя, хорошая, плохая и т. д. Например, засоренность в 10, 50 и 100 шт./м^2 – 1, 2 и 3 балла, соответственно, характеризуется слабой, средней и высокой или густота стеблестоя в 1 и 4 балла – плохой и хорошей.

Генеральная совокупность и выборка

Генеральная совокупность – это совокупность всех объектов (единиц), подлежащих изучению, т.е. относительно которых учёный намерен делать выводы при изучении конкретной проблемы.

Генеральная совокупность состоит из отдельных особей, численность генеральной совокупности или объем обозначается N. Генеральная совокупность может быть *конечной*, т.е. известного объема (N). Однако ее объем, как правило, слишком велик или не известен, и она понимается гипотетически, или абстрактно, поэтому $N \to \infty$ (N стремится к бесконечности[1]). Так, например, генеральную совокупность могут составлять 200 семян новой, интересной с точки зрения селекционера линии или 1 т семян нового сорта, делянка, а также целые поля региона и страны, засеянные этим сортом. При изучении эффективности азотных удобрений генеральной совокупностью может служить одно поле или несколько полей хозяйства (региона).

Совершенно очевидно, что самое точное значение высоты растений можно определить, измерив все 4,5 млн. растений на одном гектаре, что практически невозможно. Вся генеральная совокупность не может быть полностью изучена, во-первых, из-за большого ее объема, а во-вторых, из того, что в процессе исследования часто биологические объекты уничтожаются, например, при определении всхожести и влажности зерна, химического состава. Поэтому из генеральной совокупности отбирается часть объектов, которая непосредственно исследуется, называемая *выборкой*. Численность или объем выборки обозначается n. Содержание питательных веществ в почве определяют на основе средней пробы из 5...20 «точек» на делянке (поле). В этом случае выборкой будет проба, а генеральной совокупностью – делянка (поле).

Таким образом, выборка, или выборочная совокупность, – это множество случаев (испытуемых, объектов, событий, образцов), с помощью определенной процедуры выбранных из генеральной совокупности для участия в исследовании.

Выборки, состоящие из 20–30 единиц наблюдения, называют *малыми*, а выборки большего объема – *большими*.

---

[1] ∞ — знак бесконечности. Мы его будем использовать в смысле «очень большой» или «очень много».

Главная задача выборочного метода исследования по части (выборке) охарактеризовать целое (генеральную) совокупность: говорят, что выборка должна быть *репрезентативной*.

Репрезентативность (представительность) выборки, т.е. соответствие характеристик, полученных в результате выборочного наблюдения, показателям, характеризующим всю генеральную совокупность. Она достигается случайным методом отбора объектов из генеральной совокупности и достаточным объемом выборки. Здесь такое правило: чем больше объем выборки, тем она точнее характеризует генеральную совокупность. В свою очередь, чем больше вариация или изменчивость изучаемых объектов, тем больше должен быть объем выборки.

Главная цель выборочного метода – по статистическим показателям малой выборки (средней пробы) возможно точнее охарактеризовать всю совокупность объектов. Следует помнить, что выборка является только частью генеральной совокупности, поэтому выводы, основанные на данных выборки, всегда будут приблизительными, неточными; они сопровождаются ошибкой, величина которой находится в прямой зависимости от степени изменчивости изучаемых биологических объектов и в обратной – от объема выборки.

Так как результаты опытов всегда подвержены воздействию нерегулируемых влияний исход, которых невозможно предусмотреть, то и в результатах опыта всегда содержатся элементы случайности. Делать умозаключения обо всей генеральной совокупности на основе наблюдений над выборкой помогает основанная на теории вероятностей математическая статистика.

Эмпирические распределения и их графическое изображение

При проведении наблюдений над биологическими объектами исследователь получает массу данных, которые представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке, цифровой материал представляют в виде таблиц и графиков. Процесс систематизации и упорядочивания полученного цифрового материала в процессе наблюдений и исследований называется *группировкой*. В ходе этого процесса получаются *эмпирические ряды* (слово «эмпирический» означает – основанный на опыте, изучении фактов, опирающийся на непосредственное наблюдение, эксперимент) и *теоретические распределения* частот совокупности результатов наблюдений.

Эмпирическое распределение – распределение результатов измерений, получаемых при изучении выборки, например, распределение растений по высоте и массе, распределение делянок дробного учета по урожаю и т.п. Примером эмпирического распределения являются *вариационные ряды* – двойной ряд данных, в которых указаны значения *варьирующего признака* (X) и соответствующие им *частоты* (f). В зависимости от вида варьирования изучаемого признака различают *вариационные ряды непрерывной и прерывистой количественной изменчивости*.

Вариационные ряды могут быть представлены в виде таблиц или графиков.

Пример вариационного ряда непрерывной количественной изменчивости

Изучается длина колоса ячменя. На делянке отобрали случайным образом выборку в 100 колосьев ячменя ($n = 100$) и произвели измерение длины колоса (X), которая колебалась от 6,0 до 9,7 см. Все значения (даты) распределены в процессе группировки на 9 классов (групп) и произведен подсчет частоты (f) или встречаемости числа колосьев в каждой группе (табл. 1).

Таблица 1

Вариационный ряд длины 100 колосьев ячменя, (*X*) см

X, см	6,0–6,4	6,5–6,9	7,0–7,4	7,5–7,9	8,0–8,4	8,5–8,4	8,5–9,0	9,1–9,4	>9,5
Частота, *f*	3	8	14	19	25	17	9	4	1

Для лучшей наглядности вариационный ряд непрерывной количественной изменчивости удобнее представлять на графике. Графически такой вариационный ряд изображается в виде *гистограммы,* которая представляет собой ступенчатый график, имеющий высоту, пропорциональную частотам (*f*), и ширину, равную интервалам классов (рис. 1)

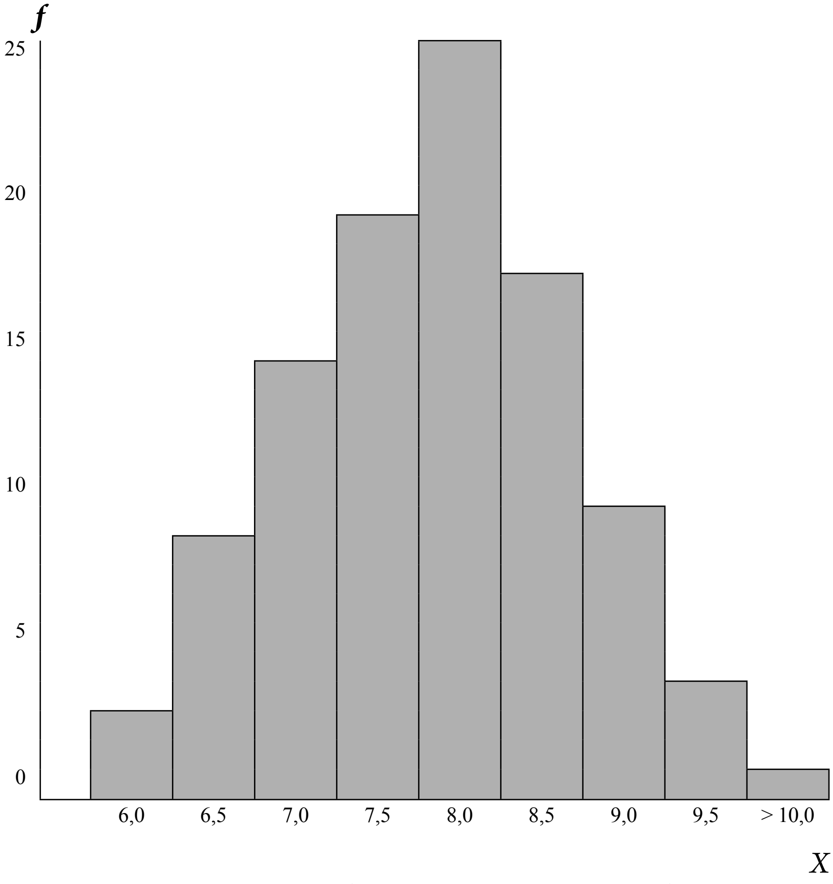


Рис. 1. Гистограмма распределения 100 колосьев ячменя по длине, см

Пример вариационного ряда прерывистой (дискретной) количественной изменчивости

Изучается распределение численности личинок колорадского жука на кустах картофеля. На делянке отобрали случайным образом выборку — 50 кустов (*n = 50*) картофеля и произвели подсчет числа личинок на каждом кусте (*X*). После подсчета данные сгруппировали на 7 классов и получили следующий вариационный ряд (табл. 2).

Таблица 2

Вариационный ряд численности личинок колорадского жука (*X*), шт./куст картофеля

X, шт./куст	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49	50–59	> 60
Частота, *f*	2	6	12	15	10	4	1

Графически данные прерывистой количественной изменчивости отображаются в виде ломаной линии, которая называется *полигоном*. Если, построив точки с координатами *(x1, f1,),(x2, f2), (xn, fn),* затем соединить их последовательно отрезками прямой, а из первой и последней точек опустить перпендикуляр на ось *X*, получим фигуру, которая графически представляет распределение единиц совокупности по признаку *X* (рис. 2). Полученный график четко отражает характер распределения личинок колорадского жука на кустах картофеля.

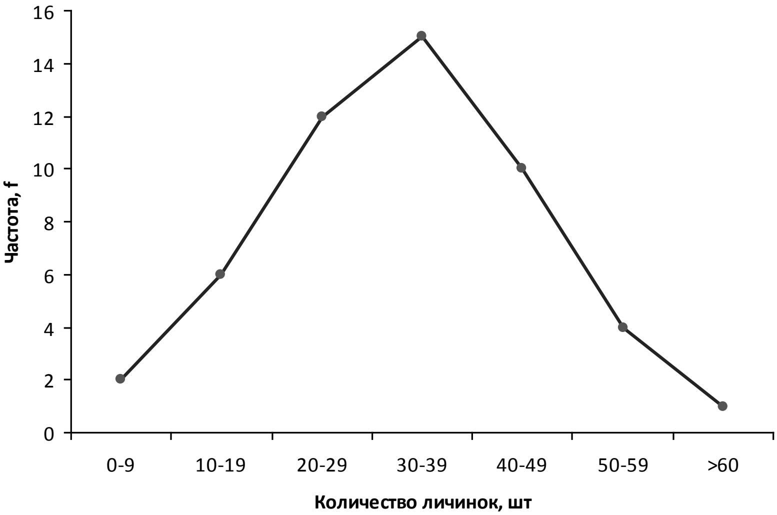


Рис. 2. Полигон распределения личинок колорадского жука: шт./куст на 50 кустах картофеля

Если последовательно увеличивать объемы выборки двух наших примеров и довести их до n = 1000, n = 10000, n = 1000000, то на графике с гистограммой все прямоугольники будут все ***у***же, а при n → ∞ для генеральной совокупности они сольются в одну линию, а на графике с полигоном ломаная линия превратится в плавную линию кривой теоретического распределения. Эмпирическая кривая позволяет подобрать соответствующее теоретическое распределение для оценки результатов наблюдений и опытов.

Статистические характеристики (показатели) выборки при количественной изменчивости

На интенсивность и направление процессов, протекающих в почве и растениях, воздействует множество факторов, что обуславливает значительную вариацию изучаемых *признаков*. Все объекты изучаемой совокупности различаются по тем или иным признакам, т.е. обладают *свойством изменчивости,* или *вариабельности.* *Отдельное значение признака* называют *случайной переменной,* или *датой*. Следует отличать *количественную непрерывную* и *дискретную* изменчивость от *качественной* дискретной изменчивости.

Число экземпляров вариационного ряда, имеющих одинаковую варианту, называется *частотой*: например, среди 5 колосьев в трех было по 33 зерна – частота 3, в двух – по 35 зерен – частота 2. Сумма всех частот равна объему выборки, т.е. числу членов ряда.

Вариационные ряды дают наглядное представление о том, как варьирует тот или иной количественный признак. Но этого недостаточно для точной характеристики статистической совокупности, поскольку они содержат много деталей, охватить которые без применения сводных или обобщающих количественных показателей весьма трудно.

При проведении наблюдений и учетов в агрономических или биологических исследованиях мы постоянно видим, что величина каждого признака изучаемых объектов колеблется. Эти колебания величины одного и того же признака, наблюдаемые в общей массе его числовых значений, называются *вариациями,* а отдельные числовые значения варьирующего признака называют *датами* и обозначаются в общем виде X_i

Количественные показатели, которые логически и теоретически обоснованы и позволяют судить о качественном своеобразии варьирующих объектов и сравнивать их между собой, называются *статистическими характеристиками* или *показателями.* Все статистические характеристики можно разделить на две группы: *средние величины* и *показатели вариации (изменчивости).*

В отличие от индивидуальных числовых характеристик, средние величины обладают большей устойчивостью, способностью характеризовать группу однородных единиц одним (средним) числом. И хотя средние абстрагируют нас от конкретных вещей, они вполне понятны и ощутимы. Средняя высота, средняя масса, средняя урожайность[2] – все эти понятия абстрактные о конкретных веществах. Значение средних заключается в их свойстве аккумулировать или уравновешивать все индивидуальные отклонения, в результате чего проявляется то наиболее устойчивое и типичное, что характеризует качественное своеобразие группового объекта, позволяет отличать его от других варьирующих объектов.

Из всех средних наибольшее распространение имеет *средняя выборочная* или *арифметическая,* которая обозначается $\overline{\mathrm{x}}$ – центр распределения, вокруг которого группируются все значения признака выборки и генеральной совокупности.

Если индивидуальные значения варьирующего признака выборки обозначить $X_i : (X_1, X_2, X_3 \ldots . X_n)$, сумму всех значений $\Sigma X = X_1, +X_2, +X_3 + \ldots . + X_n$, объем (численность) выборки (n), то среднюю арифметическую можно определить по формуле:

$$\overline{x} = \frac{\sum X}{n}$$

Для сгруппированных значений выборки вычисляют *взвешенную среднюю арифметическую* по формуле:

$$\overline{x} = \frac{\sum fX}{n}$$

где: X –значения признака; f – частота встречаемости каждого значения признака; $\Sigma f \cdot X = f_1 X_1, + f_2 X_2, + f_3 X_3 + \ldots . + f_n X_n$; n – объем выборки для сгруппированных значений ($n = \Sigma f$).

Основное свойство средней арифметической заключается в равенстве всех положительных и всех отрицательных отклонений от неё, т.е. сумма отклонений отдельных значений признака от $\overline{\mathrm{x}}$ равна нулю: $\Sigma(X - \overline{\mathrm{x}}) = \Sigma(X_1 - \overline{\mathrm{x}}) + \Sigma(X_2 - \overline{\mathrm{x}}) \cdot\cdot + \Sigma(X_n - \overline{\mathrm{x}}) = 0$. Если $\Sigma(X - \overline{\mathrm{x}})$ оказалась не равной нулю, значит, допущена ошибка в вычислениях.

---

[2] Урожайность — количество продукции растениеводства с единицы посевной площади. Ее рассчитывают в ц (т) с 1 га (в теплично-парниковом производстве — в кг с 1 м^3).

Несмотря на большое значение средних величин в оценке выборки, знать только средние значения для полной характеристики выборки недостаточно, особенно при сравнении двух или более выборок или генеральных совокупностей. За средними значениями скрывается изменчивость изучаемых признаков. Например, сравниваются два сорта пшеницы (сорт А и сорт Б) по урожайности, причем эти сорта выращивались в течение трех лет и были получены следующие урожаи:

Таблица 3

Урожайность двух сортов пшеницы, ц/га

Сорта	2008 г.	2009 г.	2010 г.	Сумма	Средняя урожайность
А	47	51	52	150	$\overline{X}_A = 50$
В	32	49	69	150	$\overline{X}_B = 50$

Если судить только по средним арифметическим, то можно сделать вывод о том, что сорта А и Б ничем не отличаются, однако при сравнении их индивидуальных значений видно, что сорт А во все годы дает стабильные урожаи, которые близки к средней выборочной, в то время как у сорта В наблюдается значительная вариация по годам (табл. 3). Этот пример наглядно показывает, что оценивать выборки только по средним значениям явно не правомерно.

Таким образом, средняя арифметическая является главной статистической характеристикой выборки, но в тоже время она определяет только среднее числовое значение, а характер варьирования чисел остается неизвестным, поэтому необходимо знать показатели изменчивости.

Основными статистическими показателями количественной изменчивости являются: *размах вариации, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент вариации, ошибка выборочной средней.*

Размах вариации (R) является показателем, характеризующим, в общем, изменчивость выборки: он определяется по разности между максимальным и минимальным значением данной выборки. Так, для предыдущего примера при одних и тех же значениях средней арифметической у сорта А урожайность варьирует от 47 до 52 ц/га, а у сорта В – от 32 до 69. Размах вариации для сорта А составляет $R_A = 52 - 47 = 5$ ц/га, а сорта В $R_B = 69 - 32 = 37$ ц/га. Следовательно, второй сорт варьирует значительно сильнее, чем первый.

Размах вариации — конкретный и простой показатель вариации, но он способен сильно меняться при повторных выборках из одной и той же генеральной совокупности, т.е. он не является характерным показателем варьирования.

Дисперсия, или *средний квадрат отклонений* (S^2), более полно характеризует меру вариации или рассеивания изучаемого признака.

Дисперсия (от лат. *dispersio* — рассеяние) в математической статистике и теории вероятностей — мера отклонения от среднего. Эта характеристика есть среднее арифметическое из квадратов отклонений наблюденных значений $(x_1, x_2, \dots x_n)$ случайной величины от их среднего арифметического, т.е. дисперсия представляет собой частное от деления суммы квадратов отклонений $\sum(X - \bar{x})^2$ на число всех наблюдений выборки без единицы $(n - 1)$ и рассчитывается по следующей формуле:

$$S^2 = \frac{\sum (X - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Для вычисления дисперсии следует определить отклонение каждого значения выборки от средней арифметической $(X - \bar{x})$, возвести каждое отклонение в квадрат $(X - \bar{x})^2$ и сумму этих квадратов отклонений $\sum(X - \bar{x})^2$ разделить на $(n - 1)$.

Знаменатель этой формулы $n - 1$ называется *числом степеней свободы* и обозначается *df* или греческой буквой γ («гамма»).

Так как размерность[3] дисперсии равна квадрату размерности изучаемого признака, то использовать напрямую дисперсию для оценки степени варьирования неудобно. В этом случае для измерения рассеивания используют другую характеристику — стандартное отклонение, которое выражается в тех же единицах, что и индивидуальные значения признака и поэтому является более удобной характеристикой варьирования, чем дисперсия.

[3] Речь в данном случае идет о единицах измерения.

Стандартное или *среднеквадратическое отклонение (S)* показывает, насколько в среднем каждое значение признака выборки отличается от ее средней арифметической величины. Его получают извлечением квадратного корня из дисперсии: $S = \sqrt{S^2}$.

Стандартное отклонение является абсолютным показателем вариации изучаемых объектов. Чем больше эта величина, тем больше изменчивость: это свидетельствует о том, что изучаемые объекты не выровнены. Чем меньше стандартное отклонение, тем более выровненным является исходный материал.

Стандартное отклонение иногда называют *ошибкой отдельного наблюдения,* так как оно служит показателем, который дает представление о наиболее вероятной средней ошибке отдельного, единичного наблюдения, взятого из данной совокупности. Так, в пределах одного значения ($\overline{x} \pm 1S$) укладывается примерно 2/3 или 68,3% всех наблюдений выборки, в пределах ($\overline{x} \pm 3S$) укладывается 99,7%, то есть практически все значения выборки. Вероятность встретить значение признака в выборке, отклоняющегося от средней больше $\pm 3S$ составляет всего 0,3%. Поэтому шестикратное значение стандартного отклонения (от $-3S$ *до* $+3S$) дает представление о ширине ряда наблюдений от минимального до максимального значения, то есть о размахе варьирования.

На основании этой зависимости (так называемого «правила шести сигм») для генеральной зависимости можно приблизительно, не прибегая к сложным расчетам, определить величину стандартного отклонения $S \approx \dfrac{X_{\max} - X_{\min}}{6}$.

Коэффициент вариации (*V*) представляет собой стандартное отклонение, выраженное в процентах к средней арифметической данной выборки:

$$V = \frac{S}{\overline{x}} \cdot 100$$

Коэффициент вариации является относительным показателем изменчивости, он выражается в процентах. В биологических и агрономических исследованиях принята следующая шкала для оценки изменчивости или вариации изучаемых признаков по величине коэффициента вариации: изменчивость *незначительная*, если V не превышает 10%, *средняя*, если V в интервале от 10% до 20%, и *значительная*, если V более 20%.

Для характеристики степени выравненности изучаемого материала иногда целесообразно использовать величину, дополняющую значение коэффициента вариации до 100. Этот показатель называют *коэффициентом выравненности* и определяют по равенству $B = 100 - V$.

Коэффициентами вариации и выравненности удобно пользоваться при оценке степени изменчивости признаков, выраженных разными единицами: высоты и массы, площадь листьев и содержание в них азота, урожаи разных культур.

Коэффициенты вариации и выравненности имеет смысл использовать при изучении вариации признака, принимающего только положительные значения. Не рекомендуется пользоваться коэффициентом вариации при оценке колебания среднегодовой температуры, когда варьирующий признак может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Ошибка выборочной средней или *ошибка выборки* ($S_{\bar{x}}$) является мерой отклонения между точным (вычисленным) значением выборочной средней ($\bar{x}$) и параметром генеральной совокупности — средней генеральной совокупности (μ).

Ошибка выборочной средней прямо пропорциональна дисперсии или стандартному отклонению и обратно пропорциональна корню квадратному из объема (численности) выборки:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

Ошибка выборочной средней (ошибка выборки) показывает насколько среднее значение выборки (средняя арифметическая) $\bar{x}$, отличается от среднего значения генеральной совокупности μ. Ошибка выборки выражается в тех же единицах измерениях, что и варьирующий признак, и приписывается к средней арифметической со знаками ±, т.е. $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$

Ошибка выборочной средней — это не ошибка расчетов, это статистическая ошибка, свойственная выборочному методу исследования. Ошибка выборочной средней возникает вследствие неполной репрезентативности, когда мы на основании выборки результаты переносим на неизвестные параметры генеральной совокупности. Как было показано выше, ошибка выборки зависит от степени изменчивости и объема выборки.

Ошибки выборки сопровождают любого исследователя, кто проводит различные наблюдения и эксперименты (опыты). Задача исследователя заключаются в определении неизвестных параметров генеральной совокупности (генеральной средней, дисперсии, минимального и максимального значений совокупности), однако для того чтобы точно определить эти параметры, необходимо исследовать всю генеральную совокупность, что, как правило, невозможно, поэтому при переносе наших умозаключений с выборки на генеральную совокупность наши выводы всегда сопровождаются различными ошибками. Математическая статистика дает нам возможность рассчитать величины этих ошибок, и в этом заключается самая главная задача математической статистики в опытном деле.

Исходя из вышеприведенной формулы видно, что для уменьшения ошибки необходимо увеличивать численность объектов из генеральной совокупности, так как исследователь на проявление изменчивости влиять не может, поскольку чаще всего это наследственные особенности биологических объектов.

Относительная ошибка выборочной средней представляет собой ошибку выборки, выраженную в процентах от соответствующей средней:

$$E = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100$$

Использование теоретических распределений

На основе *теоретических распределений* построены статистические критерии, которые используются для проверки гипотез. Наиболее часто в исследовательской работе опираются на *нормальное распределение* или *специальные распределения,* получаемые из нормального для определенно поставленной задачи при ограниченном числе степеней свободы *(t, F,* X^2-распределение, распределение Пуассона).

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Нормальным, или гауссовым, называют распределение непрерывной случайной величины *X,* которое описывается следующей функцией:

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}$$

где Y – ордината кривой или вероятность; μ – генеральная средняя, σ – стандартное отклонение генеральной совокупности ($n \to \infty$); π и *e* – константы ($\pi \cong 3{,}14$; $e = 2{,}72$).

Положение и форма кривой нормального распределения полностью определяются двумя параметрами: *генеральной средней,* обозначаемой греческой буквой μ (мю), которая находится в центре распределения, и *стандартным отклонением* σ (греческая буква «сигма»), которое отражает вариацию отдельных наблюдений около средней. Максимум или центр нормального распределения линий наблюдается при $X = \mu$, точки перегиба кривой находятся при $X_1 = \mu - \sigma$ и $X_2 = \mu + \sigma$, при $X \pm \infty$ кривая достигает нулевого значения (рис. 3).

Вид кривой полностью соответствует степени варьирования изучаемого признака, т.е. определяется величиной стандартного отклонения σ. Чем оно больше и, следовательно, чем больше варьирует изучаемый материал, тем более пологой становится вариационная кривая, при малых значениях σ она принимает иглообразную форму.

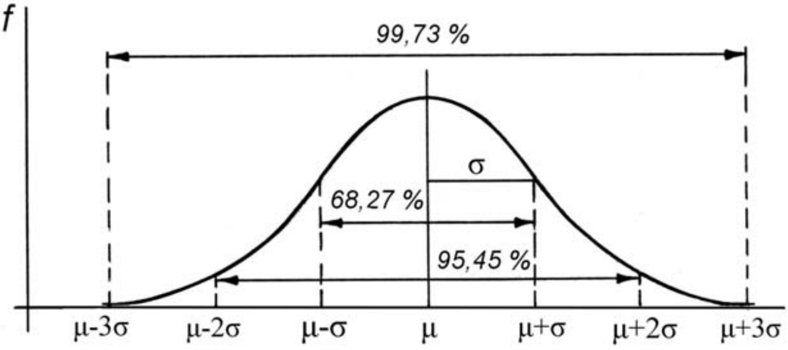


Рис. 3. Кривая нормального распределения и ее закономерности (X — отдельные зна-чения, f — частота их встречаемости, μ — средняя генеральной совокупности, σ — стандартное отклонение)

Нормальному распределению присущи следующие закономерности:

1. Наибольшей частотой или встречаемостью обладает средняя генеральной совокупности μ.

2. Размах колебаний от μ вправо и влево зависит от величины σ и укладывается в пределах трех стандартных отклонений. Продолжение кривой за пределами $\mu \pm 3\sigma$ практически можно заметить лишь при большом числе наблюдений, и этими значениями ординат можно пренебречь.

3. Если площадь под кривой нормального распределения принять за 1 или 100%, то:

– в области $\mu \pm \sigma$ лежит 68,27% (почти две трети) всех наблюдений;

– внутри пределов $\mu \pm 2\sigma$ находится 95,45% всех значений случайной величины;

– интервал $\mu \pm 3\sigma$ охватывает 99,73%, практически все значения.

Если из генеральной совокупности отобрать выборку достаточного объема ($n > 30$) с соблюдением правил репрезентативности, то все закономерности кривой нормального распределения будут справедливыми как для индивидуальных значений выборки, так и для средней арифметической, их разностей и ошибок выборки. Данное обстоятельство очень важно, так как дает возможность применять к данным выборок, подчиняющихся нормальному распределению, те же правила, что и для генеральной совокупности, и на основании выборочных данных делать выводы о неизвестных параметрах генеральной совокупности.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА (t-распределение)

Закон нормального распределения проявляется при больших выборках при n > 30–50 наблюдений, однако в исследовательской работе часто приходится иметь дело с ограниченным числом измерений, небольшой повторностью в эксперименте, когда число одноименных сосудов в вегетационном опыте или одноименных делянок каждого варианта равно 4–6. В этих случаях полагаться на критерии нормального распределения в выводах неправомерно. Для малых выборок рекомендуется опираться на *распределение Стьюдента*[4], которое является частным случаем нормального распределения. Значение критерия t-Стьюдента зависит от *числа степеней свободы* (для одной выборки число степеней свободы равно $\gamma = n - 1$) и определяется по специальным таблицам в зависимости от *доверительной вероятности* или *уровня значимости*.

Таблица 4

Значения критерия Стьюдента в зависимости от объема выборки

Объем выборки, n	5	10	20	30	50	100	∞
Число степеней свободы ($\gamma = n - 1$)	4	9	19	29	49	99	∞
Критерий Стьюдента, t_{05}	2,78	2,26	2,09	2,05	2,01	1,98	1,96

Так, из данных таблицы 4 видно, что с увеличением числа наблюдений распределение t-Стьюдента приближается к нормальному и практически при n > 30–50 переходит в него. С появлением распределения Стьюдента в статистике началась новая эра, так как стало

[4] Английский математик В. Госсет под псевдонимом «Стьюдент» в 1908 г. опубликовал свой труд в журнале «Биометрика».

возможным по выборкам малого объема делать такие же статистические обоснованные заключения, как и по выборкам большого объема.

Площадь под кривой, отграниченную от среднего на t стандартных отклонений, выраженную в процентах всей площади называют *статистической надежностью* или *уровнем вероятности Р,* т.е. вероятностью появления значения признака, лежащего в области $\mu \pm \sigma$. Вероятность того, что значение варьирующего признака находится вне указанных пределов, называется *уровнем значимости.* Он указывает вероятность отклонения от установленных пределов варьирования случайной величины $P_1 = 1 - P$. Следовательно, чем больше уровень вероятности, тем меньше уровень значимости и наоборот.

В практике биологических исследований считается возможным пользоваться вероятностями 0,95 (95%) и 0,99 (99%), которым соответствует 5%- и 1%-ный уровни значимости. Эти вероятности получили название *доверительных вероятностей,* т.е. таких значений, которым можно доверять и уверенно пользоваться ими. Принимая вероятность 0,95 (95%), риск сделать ошибку составляет 0,05 (5%). При вероятности 0,99 (99%) риск ошибиться, равен 0,01 (1%).

Проще говоря, доверительная вероятность — это вероятность правильного мнения, а уровень значимости — это вероятность ошибочного мнения.

Выбор доверительной вероятности или уровня значимости для тех или иных исследований определяется практическими соображениями, ответственностью выводов и возможностей. Вероятность 95% или уровень значимости 5% обычно считается вполне приемлемыми в большинстве исследований.

Доверительные интервалы для количественной изменчивости

Статистические характеристики выборки являются приближенными оценками неизвестных параметров генеральной совокупности. Оценка может быть представлена одним числом, точкой (точечная оценка) или некоторым интервалом (интервальная оценка), в котором с определенной вероятностью может находиться искомый параметр.

Так, выборочная средняя $\overline{x}$ является наиболее эффективной точечной оценкой генеральной средней μ, а выборочная дисперсия $S^{г}$ – точечной оценкой генеральной дисперсии σ^2. Обозначая ошибку выборочной средней, точечную оценку генеральной средней можно записать в виде $\overline{x} \pm S_{\overline{x}}$. Это означает, что эта оценка генеральной средней μ с ошибкой, равной $S_{\overline{x}}$.

Интервальной называют оценку, которая характеризуется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр. *Доверительным* называют *интервал,* который с заданной вероятностью покрывает оцениваемый параметр. Существует два доверительных интервала для количественной изменчивости: *доверительный интервал для генеральной средней* и *доверительный интервал для всей генеральной совокупности или любого значения совокупности.* Центрами таких интервалов является выборочная оценка точки, а пределы или доверительные границы интервала определяются уровнем вероятности и средней выборочной или стандартным отклонением.

<u>Доверительный интервал для генеральной средней:</u>

95% доверительный интервал для генеральной средней: $\overline{x} \pm t_{05} \cdot S_{\overline{x}}$

99% доверительный интервал для генеральной средней: $\overline{x} \pm t_{01} \cdot S_{\overline{x}}$

<u>Доверительный интервал для всей совокупности:</u>

95% доверительный интервал для всей совокупности: $\overline{x} \pm t_{05} \cdot S$

99% доверительный интервал для всей совокупности: $\overline{x} \pm t_{01} \cdot S$

где: $t_{05} \cdot S_{\overline{x}}$ – предельная ошибка выборочной средней при данном числе степеней свободы и принятом уровне значимости. Крайние точки интервала – $\overline{x}\ \ t_{05} \cdot S_{\overline{x}}$ (начало) и $\overline{x} + t_{05} \cdot S_{\overline{x}}$ (конец) – называют *доверительными границами.*

Асимметричные распределения

Результаты различных наблюдений, полевых и вегетационных опытов чаще всего располагаются приблизительно в соответствии с симметричной кривой нормального распределения, когда частоты вариантов, равно отстоящих от средней, равны между собой, т.е. симметричны. Но нередко некоторые признаки растений дают распределения, значительно отличающиеся от нормального – *асимметричные,* или *скошенные.* Асимметрия (греч. *asymmetria* – «несоразмерность») – нарушение или отсутствие идеальной зеркальной симметрии. Она может быть положительной (правосторонней), когда увеличиваются частоты правой части, и отрицательной (левосторонней), когда увеличиваются частоты левой части вариационной кривой.

Причинами асимметричных распределений могут быть:

1. Неправильно взятая выборка, когда в нее вошло непропорционально много (или мало) представителей варианта с большим или меньшим их значением.

2. Действие определенных факторов, сдвигающих частоту варьирующего признака в ту или иную сторону от среднего значения.

Когда какие-либо причины благоприятствуют более частому появлению и средних, и крайних значений признака, образуются либо так называемые *положительные эксцессивные распределения,* имеющие вид острой пирамиды с расширенным основанием, либо *отрицательные эксцессивные распределения,* когда в центре их не вершина, а впадина и вариационная кривая становится двухвершинной.

Многовершинные и двухвершинные кривые в большинстве случаев указывают, что в выборку попали представители нескольких совокупностей с различными средними, например, посеяна смесь сортов. В генетических работах двухвершинные и многовершинные кривые могут свидетельствовать о появлении объектов с новыми свойствами или признаками и указывать на результативность применяемого фактора.

Статистические характеристики (показатели) качественной изменчивости

Основными статистическими характеристиками (показателями) качественной изменчивости являются: *доля признака, показатель изменчивости, коэффициент вариации* и *ошибка выборочной доли.*

Доля признака (p) – относительная численность (частота) объектов, имеющих интересующий признак в данной совокупности. Доля признака обозначается через p_1, p_2, p_3, p_k и может быть выражена в частях от единицы или в процентах. Сумма всех долей равна единице или 100%.

Иными словами, доля признака – это отношение численности объектов, имеющих интересующий исследователя признак к общей численности выборки $p_1 = \frac{n_1}{N}$ $p_2 = \frac{n_2}{N}$ $p_k = \frac{n_k}{N}$, или в процентах $p_1 = \frac{n_1}{N}100$ $p_2 = \frac{n_2}{N}100$ $p_k = \frac{n_k}{N}100$, где: N – общая численность (объем выборки); n_1, n_2, n_k – численность объектов с определенными признаками.

При *альтернативной (двояковозможной)* качественной изменчивости доля одного признака обозначается через p, а второго – q и рассчитывается по формулам: $p = \frac{n_1}{N}$ $q = \frac{n_2}{N}$ или в процентах $p = \frac{n_1}{N}100,$ $q = \frac{n_2}{N}100,$ где: N – общая численность (объем выборки), n_1 – численность объектов с интересующим признаком; n_2 – численность объектов с противоположным (альтернативным) признаком; сумма долей равна $p + q = 1$ или *100%.*

Показатель изменчивости качественного признака (S) характеризует варьирование величин относительно друг друга и определяется по формуле: $S = \sqrt[k]{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdot p_k}$, где: p_1, p_2, p_k – доли признака; k – число градаций признака. Для альтернативной изменчивости формула имеет следующий вид:

$$S = \sqrt{p \cdot q},$$

где: p – доля одного признака, q – доля альтернативного признака.

Коэффициент вариации качественного признака (V_p) – фактический показатель изменчивости, выраженный в процентах к максимально возможной изменчивости:

$$V_p = \frac{S}{S_{\max}} \cdot 100,$$

где: S – фактическая доля; S_{max} – максимальная изменчивость, для альтернативной изменчивости при $k = 2$, $S_{max} = 0{,}5$ или 50%; при $k=3$, $S_{max} = 0.33$; при $k = 4$, $S_{max} = 025$ и т.д.

Ошибку выборочной доли (S_p) вычисляют по формуле: $S_p = \frac{S}{N}$, где: S – показатель изменчивости; N – общая численность выборки.

Для альтернативной изменчивости формула ошибки выборочной доли имеет следующий вид:

$$S_p = \sqrt{\frac{p \cdot q}{N}},$$

где: p – доля одного признака, q – доля *альтернативного признака; N – общая численность выборки.*

*Ошибка доли показывает, насколько доля выборки (**p**) отличается от доли в генеральной совокупности (**P**).*

Для качественной изменчивости *доверительный интервал для генеральной доли* имеет следующий вид: $p \pm t_{05} S_p$

Расчет статистических характеристик количественной изменчивости

а) <u>для малых выборок</u>

<u>*Пример.*</u> На пришкольном участке изучали лекарственные растения. С делянки отобрали выборку ($n = 10$) растений ромашки аптечной и произвели измерение высоты растений X_i : 45, 26, 38, 21, 12, 20, 32, 17, 40, 31. Необходимо вычислить статистические показатели выборки и перенести результаты оценки на генеральную совокупность.

<u>*Решение:*</u> Малыми выборками называются выборки объемом 20–30 наблюдений. Данные малых выборок, как правило, не группируют; для таких выборок производится прямой подсчет всех статистических показателей.

Статистические характеристики или показатели вычисляются в следующей последовательности:

1. Выборочная средняя или средняя арифметическая:

$$\bar{x} = \frac{\sum X}{n} = \frac{(45 + 26 + 38 + 21 + 12 + 20 + 32 + 17 + 40 + 31)}{10} = 28{,}2 \text{ см}$$

Самым трудоемким и сложным при определении статистических показателей является расчет сумм квадратов отклонений.

Существует три способа расчета сумм квадратов отклонений: прямой способ (от выборочной средней), от произвольной величины A и по исходным датам. Все эти способы дают одинаковые результаты. Познакомимся с двумя способами — от выборочной средней и по исходным датам. Для наглядности определения суммы квадратов отклонений ($СКО = \Sigma(X - \bar{x})^2$) построим вспомогательную таблицу и запишем расчетные данные:

Таблица 5

Таблица для расчета средней и квадратов

Значение признака, X	От выборочной средней		От исходных дат	
	$(X-\bar{x})$	$(X-\bar{x})^2$	X	X^2
45	16,8	282,24	45	2025
26	–2,2	4,84	26	676
38	9,8	96,04	38	1444
21	–7,2	51,84	21	441
12	–16,2	262,44	12	144
20	–8,2	67,24	20	400
32	3,8	14,44	32	1024
17	–11,2	125,44	17	289
40	11,8	139,24	40	1600
31	2,8	7,84	31	961
$\Sigma X=282$	$\Sigma(X-\bar{x})=0$	$\Sigma(X-\bar{x})^2=1051{,}6$	$\Sigma X=282$	$\Sigma X^2=9004$

Для вычисления сумм квадратов отклонений первым способом определяем разности значений индивидуальных значений (X) от средней $(\bar{x})$ и записываем полученные данные со своими знаками во вторую колонку. Сумма $\Sigma(X-\bar{x})=0$, что свидетельствует о правильности расчетов на этом этапе.

Возводим отклонения в квадрат, записываем полученные данные в третью колонку, суммируем их и получаем сумму квадратов отклонений

$$\Sigma(X-\bar{x})^2=1051{,}6.$$

Однако эту сумму квадратов отклонений проще рассчитать вторым способом — от исходных дат, минуя разности от выборочной средней. Для этого возведем в квадраты исходные даты (X), затем просуммируем и получим сумму квадратов $\Sigma X^2 = 9004$. Далее рассчитывается корректирующий фактор или поправку (C) по формуле:

$$\tilde{N}=\frac{(\sum X)^2}{n}=\frac{(282)^2}{10}=7952{,}4$$

Сумма квадратов $\sum(X-\bar{x})^2 = \Sigma X^2 - C = 9004 - 7952{,}4 = 1051{,}6$. Как видим, получили ту же самую сумму квадратов отклонений. Далее определяем по формулам показатели изменчивости:

2. Дисперсия $S^2 = \dfrac{\sum(X-\bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{1051{,}6}{10-1} = 116{,}8$

3. Стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{116{,}8} = 10{,}8$ см

4. Коэффициент вариации $V = \dfrac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \dfrac{10{,}8}{28{,}2} \cdot 100 = 38{,}3\%$

5. Ошибка выборочной средней $S_{\bar{x}} = \dfrac{S}{\sqrt{n}} = = \dfrac{10{,}8}{\sqrt{10}} = 3{,}41$ см

6. Относительная ошибка средней $S_{\bar{x}} = \dfrac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100 = \dfrac{3{,}41}{28{,}2} \cdot 100 = 12{,}1\%$.

Вычисленные показатели являются оценками выборки, по этим показателям можно судить о средней и степени изменчивости выборки. Для нашего примера: *средняя длина растений ромашки аптечной на основании 10 измерений составляет $\bar{x} = 28{,}2$ см; стандартное отклонение S показывает, что в среднем в выборке могут быть растения, отличающиеся от выборочной средней на 10,1 см. Значение коэффициента вариации V = 38,3% свидетельствует о сильной изменчивости высоты растений ромашки аптечной.*

Для определения параметров генеральной совокупности рассчитаем 95%-процентные доверительные интервалы:

95%-ный доверительный интервал для генеральной средней (μ):
$\bar{x} + t_{05} \cdot S_{\bar{x}} = 28{,}2 \pm 2{,}26 \cdot 3{,}41 = 28{,}2 \pm 7{,}7 = 20{,}5 \div 35{,}9$ см

95%-процентный доверительный интервал для всей совокупности:
$\bar{x} \pm t_{05} \cdot S = 28{,}2 \pm 2{,}26 \cdot 10{,}81 = 28{,}2 \pm 24{,}4 = 3{,}8 \div 52{,}6$ см

Теоретические значения критерия t-Стьюдента берем из таблицы (Приложение 1) для 5%-ного уровня значимости при степенях свободы $\gamma = n - 1 = 9$.

По доверительным интервалам можно сделать следующий вывод: средняя высота растений ромашки аптечной в генеральной совокупности с вероятностью 95 % находится в интервале 20,5 ÷ 35,9 см, а все значения генеральной совокупности (от минимального до максимального значения) с вероятностью 95 % в интервале 3,8 ÷ 52,6 см. Вероятность ошибочного заключения составляет 5%.

<u>б) большие выборки, сгруппированные значения</u>

Выборки объемом (n) более 30-50 наблюдений называются большими. При статистической обработке таких выборок результаты рекомендуется представить в виде систематического вариационного ряда.

<u>Пример.</u> Из генеральной совокупности отобрали выборку $n = 50$ клубней картофеля, затем определили массу каждого клубня картофеля. Получили следующие данные:

X: 120, 38, 40, 77, 62, 106, 31, 80, 46, 75, 39, 100, 95, 91, 103, 92, 97, 108, 95, 138, 65, 57, 85, 121, 50, 53, 55, 67, 59, 148, 115, 94, 125, 117, 118, 72, 75, 88, 83, 140, 79, 85, 27, 83, 71, 10, 86, 77, 73, 60.

Необходимо провести группировку данных выборки, построить кривую вариационного ряда, рассчитать статистические показатели выборки и доверительные интервалы для генеральной совокупности.

<u>Решение.</u> В таком виде этот ряд данных массы 50 клубней картофеля мало приспособлен для выявления характера варьирования и построения графика. Для этого необходимо сделать *группировку* данных. *Группировка* — это процесс систематизации и упорядочивания данных выборки с целью построения кривой вариационного ряда и расчета статистических характеристик выборки.

В нашем примере масса клубней варьирует непрерывно и может принимать любые значения, поэтому целесообразно провести интервальную группировку.

Группировка проводится в следующей последовательности:

1. *Определение числа классов или групп,* на которые необходимо распределить все значения выборки. Число классов зависит от объема n (численности) выборки. Ориентировочно число классов k можно определить по следующей формуле: $k = \sqrt{n}$. Для нашего примера при $n=50$, $k = \sqrt{50} \approx 7$. Число классов должно быть только целым числом, поэтому при извлечении корня квадратного число классов необходимо округлять до целого числа.

2. *Определение интервала i для каждого класса* — промежутка, на которое разбивается ряд варьирующих признаков. Классовый интервал представляет собой размах варьирования для каждого класса. Величину классового интервала находят делением размаха варьирования крайних значений признака выборки на число групп k по формуле: $\mathrm{i} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k}$. Для нашего примера масса самого

крупного клубня равна X_{max} *= 148 г,* самого мелкого X_{min} *= 10 г,* число классов (k) равно 7. Подставив эти значения в формулу, получим $i = \frac{148 - 10}{7} = 19{,}714 \approx 20\,\tilde{a}$. Величину классового интервала необходимо округлить и представить ее с той точностью, с какой произведены измерения выборки: в нашем случае округляем ее с точностью до 1 г — она равна 20 г. Величина интервала для всех классов должна быть одной и той же.

3. *Определение границ каждого класса* начинают с определения значений первого класса (группы). В нашем случае нижняя граница первого класса начинается с X_{min} *= 10 г,* для нахождения верхней границы первого класса к этому значению прибавляем величину интервала *i = 20,* получаем значение верхней границы первого класса 30 г. Для того чтобы одно и то же значение признака не повторялось в двух классах, рекомендуется от значения верхней границы первого класса вычесть величину равную точности измерений, в нашем случае 1 г. и получаем 30 – 1 = 29 г. Таким образом, нижняя граница первого класса = 10 г, верхняя граница — 29 г. Величина промежутка между границами соседних классов должна быть всегда одной и той же, эта величина равна величине классового интервала, поэтому нижние и верхние границы последующих классов определяют прибавлением к этим значениям величины классового интервала *i*. Начало второго класса будет 10 + 20 = 30, третьего — 30 + 20 = 50, четвертого — 50 +20 = 70 и т.д. Конец второго класса будет 29 + 20 = 49, третьего — 49 + 20 = 69, четвертого — 69 + 20 = 89 и т.д.

4. *Составление рабочей таблицы*. Подготавливают макет таблицы, в первой колонке (подлежащее) записывают интервал каждой группы, а во второй (сказуемое) — число объектов, входящих в этот интервал (табл. 6).

Таблица 6

Вариационный ряд распределения массы 50 клубней картофеля, г

Классы (группы), X	Частота, *f*	Среднее значение класса (групповые средние)
10 ÷ 29	2	10 + i/2 =20
30 ÷ 49	5	40
50 ÷ 69	9	60
70 ÷ 89	15	80
90 ÷ 109	10	100
110 ÷ 129	6	120
130 ÷150	3	140
Сумма	$\Sigma f = 50$	

5. *Проводят разноску всех значений по классам* в зависимости от величины значений признака и подсчитывают встречаемость или частоту *f* объектов в каждом классе. Сумма всех частот равна объему выборки $\Sigma f \div= n$. Если сумма всех частот не равна объему выборки, необходимо повторить разноску и распределение частот по группам.

Групповые средние при непрерывной изменчивости устанавливают прибавлением к началу каждой группы половины интервала. Данные таблицы 6 представляют собой эмпирический ряд распределения 50 клубней картофеля по массе, который называется *вариационным рядом* — двойной ряд данных, в которых указаны значения варьирующего признака (первая колонка) и соответствующие им частоты (вторая колонка).

После группировки получается короткий, легко обозримый вариационный ряд, позволяющий судить о характере изменчивости изучаемого признака. Однако еще более наглядную визуальную картину можно получить, если данные вариационного ряда представить графически. Способы построения графиков различны для интервальных и дискретных рядов. Графически непрерывный вариационный ряд можно изобразить, используя прямоугольную систему координат. Для построения на горизонтальной линии (ось абсцисс) наносят значения интервала классов, а по вертикали (ось ординат) — частоты этих значений *f*. Масштаб необходимо выбирать, чтобы весь график имел удобную и легко обозримую форму, это лучше всего получается при руководстве правилом «золотого сечения», согласно которому высота графика относится к его ширине примерно как 5:8.

Наш график будет иметь следующий вид:

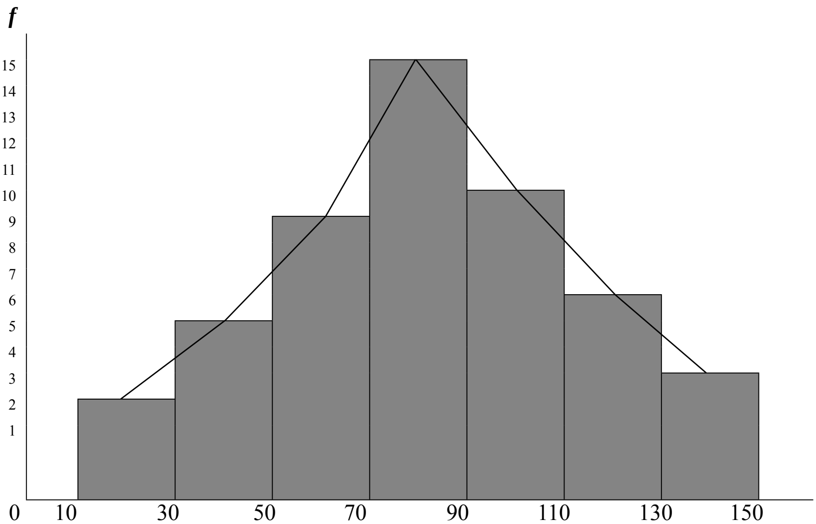


Рис. 5. Гистограмма и кривая распределения 50 клубней картофеля по массе, г

Такой ступенчатый график, имеющий высоту, пропорционально частотам, а ширину, равную интервалам классов, называется *гистограммой.* Если соединить средние значения классов, то мы получаем кривую распределения, или полигон. Данная кривая и есть кривая эмпирического распределения нашей выборки объемом 50 клубней.

Далее рассчитаем статистические показатели (характеристики) сгруппированного ряда значений нашего примера:

1. Построим рабочую таблицу для вариационного ряда массы 50 клубней картофеля и вычисления средней выборочной и суммы квадратов отклонений:

Таблица 7

Таблица расчетов частот, групповых средних и сумм квадратов

Классы (группы), X_i	Частота, f	Групповые средние, X	Вычисление сумм квадратов		
			$f{\cdot}X$	X^2	$f{\cdot}X^2$
10 ÷ 29	2	20	40	400	800
30 ÷ 49	5	40	200	1600	8000
50 ÷ 69	9	60	540	3600	32400
70 ÷ 89	15	80	1200	6400	96000
90 ÷ 109	10	100	1000	10000	100000
110 ÷ 129	6	120	720	14400	86400
130 ÷150	3	140	420	19600	58800
Сумма	$\Sigma f = n = 50$	–	$\sum f \cdot X = 4120$	–	$\sum f \cdot X^2 = 382400$

2. Рассчитаем среднюю групповую по формуле:

$$\bar{x} = (\sum f \cdot X) : n = 4120 : 50 = 82{,}4 \text{ г}$$

3. Рассчитаем сумму квадратов по формуле:

$$\sum (X - \bar{x})^2 = \sum f \cdot X^2 - (\sum f \cdot X)^2 : n = 382400 - (4120^2 : 50) = 42912$$

4. Дальнейшие вычисления такие же, как и для малых выборок:

1. Дисперсия $S^2 = \dfrac{\sum (X - \bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{42912}{49} = 875{,}8$

2. Стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{875{,}8} = 29{,}6$ г

3. Коэффициент вариации $V = \dfrac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \dfrac{29{,}6}{82{,}4} \cdot 100 = 35{,}9\%$

4. Ошибка выборочной средней $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{29{,}6}{\sqrt{50}} = 4{,}2$

Вычисленные показатели являются оценками выборки, по этим показателям можно судить о средней и о степени изменчивости выборки. Для нашего примера: *средняя масса клубня картофеля выборки составляет* $\bar{x} = 82{,}4$ *г; стандартное отклонение S показывает, что в среднем могут быть клубни картофеля от выборочной средней на 29,6 г. Значение коэффициента вариации V = 35,9% свидетельствует о значительном варьировании клубней картофеля по массе.*

Для определения параметров генеральной совокупности рассчитаем 95%- и 99%-ные доверительные интервалы:

95%-ный доверительный интервал для генеральной средней (μ):

$$\bar{x} \pm t_{05} \cdot S_{\bar{x}} = 82{,}4 \pm 2{,}01 \cdot 4{,}2 = 82{,}4 \pm 8{,}4 = 74{,}0 \div 90{,}8 \text{ г}$$

99%-ный доверительный интервал для генеральной средней (μ):

$$\bar{x} \pm t_{01} \cdot S_{\bar{x}} = 82{,}4 \pm 2{,}68 \cdot 4{,}2 = 82{,}4 \pm 11{,}3 = 71{,}0 \div 93{,}7 \text{ г}$$

95%-ный доверительный интервал для всей совокупности:

$$\bar{x} \pm t_{05} \cdot S = 82{,}4 \pm 2{,}01 \cdot 29{,}6 = 82{,}4 \pm 59{,}5 = 23 \div 142 \text{ г}$$

95%-ный доверительный интервал для всей совокупности:

$$\bar{x} \pm t_{01} \cdot S = 82{,}4 \pm 2{,}68 \cdot 29{,}6 = 82{,}4 \pm 79{,}3 = 3 \div 162 \text{ г}$$

Теоретические значения критерия t-Стьюдента берем из таблицы (Приложение 1) для 5%- и 1%-ного уровней значимости при степенях свободы $\gamma = n - 1 = 49$

$t_{05} = 2{,}01$; $t_{01} = 2{,}68$.

По доверительным интервалам можно сделать следующий вывод: *средняя масса клубней картофеля в генеральной совокупности с вероятностью 95 % находится в интервале 74,0 ÷ 90,8 г, а с вероятностью 99 % – в интервале 71,0 ÷ 93,7 г. Все значения генеральной совокупности (от минимального до максимального значения) с вероятностью 95 % находятся в интервале 23 ÷ 142 г, а при более строгом подходе с вероятностью 99% в интервале 3 ÷ 162 г.* Вероятность ошибочного заключения в первом случае составляет 5%, а во втором — 1%.

Статистические методы проверки гипотез

Гипотеза (от греч. *hipothesis* — основание, предположение) — положение, выдвигаемое в качестве предварительного, условного объяснения некоторого явления или группы явлений; предположение о существовании некоторого явления.

Вопрос о проверке гипотез — один из основных при применении математической статистики в любых исследованиях. Статистические методы проверки гипотез являются надежной основой для принятия решения при некоторой неопределенности, обусловленной случайной вариацией изучаемых явлений и процессов.

Статистические методы проверки гипотез в биологических исследованиях применяются в тех случаях, когда необходимо сделать заключение о выборочном наблюдении для суждения о законе распределения совокупности, для решения вопроса о существенности разности между выборочными средними двух или более вариантов, для установления принадлежности изучаемого значения признака к данной совокупности и соответствия между фактическими и теоретическими распределениями частот, для установления корреляционной зависимости. *Статистической гипотезой* называют научное предположение о тех или иных статистических законах распределения рассматриваемых случайных величин, которое может быть проверено на основе выборки. Чаще всего в качестве статистической гипотезы выступает *нулевая гипотеза* (для нее используют условное обозначение H_0). *Нулевая гипотеза — это предположение об отсутствии реального различия между фактическими и теоретическими ожидаемыми наблюдениями*. Применительно к задачам, в которых сравниваются средние значения двух и большего числа вариантов, *нулевая гипотеза — это предположение об отсутствии различий между средними значениями их генеральных совокупностей, а если между их выборочными средними и есть различия, то эти различия обусловлены влиянием случайных (неизучаемых) причин или факторов*. Например, при сравнении двух вариантов на основании их средних арифметических средних по урожаю, его качеству, высоте растений и т.д. $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ нулевую гипотезу записывают следующим образом: $H_0 : d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0$.

Если в процессе статистического тестирования принимается нулевая гипотеза, то отвергается *альтернативная, (противоположная) ги-*

потеза (H_A), т.е. предположение о наличии различий, и наоборот, если отвергается нулевая гипотеза, то принимается альтернативная гипотеза, которая свидетельствует о наличии различий между изучаемыми вариантами по определенным признакам. В случае принятия нулевой гипотезы делают вывод о том, что различия между вариантами несущественны с определенной долей вероятности, а во втором случае — различия существенны (значимы). Следует избегать в выводах слова «достоверны», что присуще событиям со 100% вероятностью. Это было бы справедливо, если бы мы проводили анализ на основании точных параметров генеральных совокупностей, но так как мы выводы о генеральных совокупностях делаем на основе выборок, то наши выводы всегда сопровождаются определенной ошибкой. Принятие нулевой гипотезы означает, что данные наблюдения не противоречат предположению об отсутствии различий между фактическими и теоретическими значениями, но не доказывают отсутствия такого различия. Отбрасывание гипотезы означает, что эмпирические данные несовместимы с нулевой гипотезой, а верна другая, альтернативная гипотеза.

Алгоритм действия исследователя при проверке нулевой гипотезы состоит из следующих последовательных пунктов:

- выдвигается нулевая гипотеза ($\boldsymbol{H_0}$) — предположение об отсутствии реальных различий между средними значениями вариантов и выдвигается альтернативная гипотеза ($\boldsymbol{H_A}$) — предположение о наличии различий между вариантами;
- выбирается доверительная вероятность или уровень значимости для проверки нулевой гипотезы (*0,05–5% или 0,01–1%)*;
- выбирается критерий существенности (параметрический или непараметрический) для проверки гипотезы (см. ниже);
- рассчитываются статистические показатели для каждого варианта;
- в специальных таблицах находят теоретическое значение критерия для заданного уровня значимости;
- оценка разности средних (проверка H_0) может быть произведена по доверительным интервалам для генеральных средних, по фактическому значению критерия существенности или по наименьшей существенной разности ($НСР_{05}$, $НСР_{01}$).

Справедливость нулевой гипотезы проверяется вычислением статистических критериев проверки для определенного уровня значимости: 0,05–5% или 0,01–1%.

Для проверки статистических гипотез, в том числе нулевой гипотезы, используют *параметрические и непараметрические критерии.*

Параметрические критерии основаны на предположении, что распределение признака в совокупности подчиняется закону нормального распределения. К таким критериям относятся критерии t-Стьюдента, F-Фишера, χ^2-Хи квадрат, применение которых требует вычисления оценок параметров распределения.

Непараметрические критерии не требуют предварительного вычисления статистических характеристик выборок и даже приближенного значения закона распределения признака. К непараметрическим критериям относятся: критерий *Х-Ван-Вандена, W- Вилкоксона, Т-Уайта* и др. Эти критерии рекомендуется использовать, когда данные изучаемых выборок и их генеральных совокупностей сильно отличаются от нормального распределения. Не все значения признаков биологических объектов распределяются нормально — такие случаи встречаются в агрономических исследованиях по защите растений, когда данные выражены в уловных единицах, баллах, знаках и т.д.

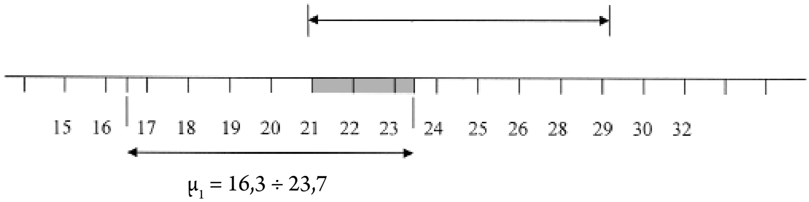
Проверка нулевой гипотезы при сравнении выборочных средних двух вариантов может быть осуществлена следующими методами:

1. С помощью *доверительных интервалов для генеральных средних*. Если доверительные интервалы для генеральных средних перекрываются, то нулевая гипотеза о существенности разности средних принимается ($H_0 = 0$), а если границы доверительных интервалов не перекрываются, то нулевая гипотеза отвергается ($H_0 \neq 0$) и принимается альтернативная гипотеза (H_A). Например, были рассчитаны следующие доверительные интервалы для генеральных средних:

$$\bar{x}_1 \pm t_{05} \cdot s_{\bar{x}_1} = 20 \pm 2{,}45 \cdot 1{,}5 = 16{,}3 \div 23{,}7$$

$$\bar{x}_2 \pm t_{05} \cdot s_{\bar{x}_2} = 25 \pm 2{,}45 \times 1{,}7 = 20{,}8 \div 29{,}2$$

Для наглядности доверительные интервалы двух совокупностей можно изобразить на прямой линии:



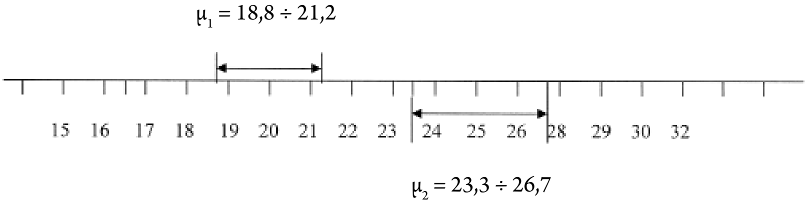
Область закрашивания показывает, что доверительные интервалы для генеральных средних перекрывают друг друга, и, следовательно, разность между выборочными средними $d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 5$ нельзя переносить на генеральные средние, так $\mu_1 = \mu_2$, и генеральная разность $D = \mu_2 = \mu_1 = 0$ может быть равной нулю, поэтому нулевая гипотеза принимается.

Если в этом же примере ошибки выборки будут незначительными, то доверительные интервалы не будут перекрываться:

$$\bar{x}_1 \pm t_{05} \cdot s_{\bar{x}_1} = 20 \pm 2{,}45 \cdot 0{,}5 = 18{,}8 \div 21{,}2$$

$$\bar{x}_2 \pm t_{05} \cdot s_{\bar{x}_2} = 25 \pm 2{,}45 \cdot 0{,}7 = 23{,}3 \div 26{,}7$$

Доверительные интервалы двух совокупностей на прямой линии будут изображаться следующим образом:



Из этого рисунка видно, что разность между выборочными средними $d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 5$ можно перенести на генеральные средние, так $\mu_1 \neq \mu_2$, и генеральная разность $D = \mu_2 - \mu_1 \neq 0$ не равна нулю, поэтому нулевая гипотеза отвергается, между средними двух вариантов есть существенные различия на 5% -ном уровне значимости.

2. С помощью критерия существенности ($t_ф$*-критерия*), который представляет собой отношение фактической разности между двумя выборочными средними к ошибке разности этих средних:

$$t_{\hat{o}} = \frac{d}{S_d} = \frac{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|}{\sqrt{s^2_{\bar{x}_1} + s^2_{\bar{x}_2}}},$$

$d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ – разность между средними арифметическими 2-х выборок $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$

$S_d = \sqrt{S^2_{\bar{x}_1} + S^2_{\bar{x}_2}}$ – ошибка разности; $S_{\bar{x}_1}$ и $S_{\bar{x}_2}$ – ошибки средних арифметических.

Табличное значение критерия Стьюдента находят по таблице (Приложение 1) при заданном уровне значимости для расчетного числа степеней свободы и сравнивают фактическое значение критерия с табличным. Если $t_ф \geq t_{05}$, то нулевая гипотеза отвергается ($H_0 \neq 0$), а если $t_ф < t_{05}$, то нулевая гипотеза принимается — различия находятся в пределах случайных колебаний.

3. По *наименьшей существенной разности* (*НСР*). Наименьшая существенная разность представляет собой величину предельных случайных отклонениям при сравнении двух средних величин. Она определяется в зависимости от принятой доверительной вероятности на 5%-ном уровне значимости: $НСР_{05} = t_{05} \cdot S_d$ или 1%-ном уровне значимости: $НСР_{01} = t_{01} \cdot S_d$.

Табличное значение критерия Стьюдента находят по таблице (Приложение 1) при расчетном числе степеней свободы. Ошибку разности рассчитывают по формуле: $S_d = \sqrt{S^2_{\bar{x}_1} + S^2_{\bar{x}_2}}$.

Если фактическая разность между выборочными средними по модулю[5] $|\pm d| > НСР$, то нулевая гипотеза отвергается ($H_0 \neq 0$), а если $|\pm d| < НСР$ – принимается ($H_0 = 0$).

Несущественная разность не утверждает, но и не отрицает, что между генеральными средними не существует различия. Несущественная разность могла оказаться такой вследствие недостаточного объема выборок, тогда как повторное исследование на более многочисленном материале дает существенную разность. После принятия или отбрасывания нулевой гипотезы необходимо сделать агрономический вывод относительно изучаемых вариантов.

[5] Модуль числа, записываемый в прямых скобках, представляет собой значение числа без учета, положительное это число или отрицательное. Например, $10 - 15 = -5$, но $|10 - 15| = 5$.

Сравнение двух вариантов с независимыми выборками при количественной изменчивости

При сравнении двух независимых (несопряженных) выборок, когда единицы наблюдения первой выборки не связаны никаким общим условием с единицами второй выборки, оценивается существенность разности средних ($d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$).

Пример 2. Сравниваются два сорта яровой пшеницы Саратовская 29 (вариант 1) и Безенчукская 98 (вариант 2) по содержанию белка (%) в зерне. Испытания для каждого сорта провели по 10 образцам (объемы выборок одинаковы $n_1 = 10$, $n_2 = 10$). Содержание белка в зерне у сорта Саратовская 29 составило (%): 18,6; 19,4; 16,9; 20,0; 17,9; 18,3; 18,4; 18,4; 21,1; 18,0 , а у сорта Безенчукская 98: 17,8; 16,6; 17,0; 15,6; 16,5; 17,0; 17,1; 16,4; 19,3; 16,7. Варианты независимы. Необходимо определить, существенны ли различия в содержании белка у этих сортов?

Решение: Оценку разности средних двух независимых вариантов проведем в следующей последовательности:

1. Выдвигаем нулевую гипотезу (H_0) — предположение об отсутствии реальных различий между средним содержанием белка у сорта яровой пшеницы Саратовская 29 (вариант 1) и Безенчукская 98 (вариант 2) и альтернативную гипотезу (H_A) — предположение о наличии различий между вариантами.

2. Выбираем доверительную вероятность *(0,95–95%)* или уровень значимости для проверки нулевой гипотезы *(0,05–5%)*.

3. Выбираем критерий существенности для проверки гипотезы — *t* критерий Стьюдента.

4. Рассчитываем статистические характеристики (показатели) для каждого варианта. Формулы всех статистических показателей и их значения представлены в рабочей таблице:

Таблица 8

Рабочая таблица с формулами для расчетов:

Статистические характеристики	Вариант 1	Вариант 2
$\bar{x} = \frac{\sum X}{n}$	$\bar{x}_1 = \frac{(18{,}6 + .. + 18{,}0)}{10} = \frac{187}{10} = 18{,}7$	$\bar{x}_2 = \frac{(17{,}8 + .. + 16{,}7)}{10} = \frac{170}{10} = 17{,}0$
$\tilde{N} = \frac{(\sum X)^2}{n}$	$C = \frac{187^2}{10} = 3496{,}9$	$C = \frac{170^2}{10} = 2890{,}0$
ΣX^2	$\Sigma X^2=(18{,}6^2+19{,}4^2+..+18^2)=3509{,}56$	$\Sigma X^2=(17{,}8^2+16{,}6^2+..+16{,}7^2)=2898{,}76$
$\Sigma(X-\bar{x})^2=\Sigma X^2 - C$	$\sum(X-\bar{x})^2 = 3509{,}56 - 3496{,}9 = 12{,}66$	$\sum(X-\bar{x})^2 = 2898{,}76 - 2890 = 8{,}76$
$S^2 = \frac{\sum(X-\bar{x})^2}{n-1}$	$S^2 = \frac{12{,}66}{9} = 1{,}42$	$S^2 = \frac{8{,}76}{9} = 0{,}97$
$S = \sqrt{S^2} =$	$S = \sqrt{1{,}42} = 1{,}19$	$S = \sqrt{0{,}97} = 0{,}99$
$s_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} =$	$s_{\bar{x}} = \frac{1{,}19}{\sqrt{10}} = 0{,}38$	$s_{\bar{x}} = \frac{0{,}99}{\sqrt{10}} = 0{,}31$
$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 =$	$V = \frac{1{,}19}{18{,}7} \cdot 100 = 6{,}36$	$V = \frac{0{,}99}{17{,}0} \cdot 100 = 5{,}82$

Оценку существенности разности между средними по вариантам можно провести 3 способами:

а) интервальным методом

По таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы для каждой выборки $\gamma = n - 1 = 10 - 1 = 9$ находим критерий Стьюдента на 05%-ном уровне значимости $t_{05} = 2{,}26$.

Рассчитываем 95% доверительный интервал генеральной средней для каждого варианта по следующим формулам:

$$\bar{x}_1 \pm t_{05} \cdot s_{\bar{x}_1} = 18{,}7 \pm 2{,}26 \cdot 0{,}38 = 17{,}8 \div 19{,}6$$

$$\bar{x}_2 \pm t_{05} \cdot s_{\bar{x}_2} = 17{,}0 \pm 2{,}26 \cdot 0{,}31 = 16{,}3 \div 17{,}7$$

Доверительные интервалы для генеральных средних не перекрываются — следовательно, нулевая гипотеза отвергается ($H_0 \neq 0$).

б) по критерию существенности ($t_ф$)

Фактическое значение критерия существенности рассчитываем по формуле:

$$t_ф = \frac{d}{S_d} = \frac{|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|}{\sqrt{s^2_{\bar{x}_1} + s^2_{\bar{x}_2}}} = \frac{|17{,}0 - 18{,}7|}{\sqrt{0{,}38^2 + 0{,}31^2}} = 3{,}47$$

Табличное значение критерия Стьюдента для двух независимых выборок находим по таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы $n_1 + n_2 - 2 =$

$10 + 10 - 2 = 18$ $t_{05} = 2{,}10$

Сопоставляя фактическое значение критерия существенности с табличным, приходим к выводу, что $t_ф > t_{05}$, поэтому нулевая гипотеза отвергается ($H_0 \neq 0$). Следовательно, различия между вариантами существенны.

в) по наименьшей существенной разности (НСР)

$НСР_{05} = t_{05} \cdot S_d =$ $НСР_{01} = t_{01} \cdot S_d =$

Табличное значение критерия Стьюдента для двух независимых выборок находим по таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы $n_1 + n_2 - 2 =$

$10 + 10 - 2 = 18$ $t_{05} = 2{,}10$

Ошибку разности рассчитываем по формуле:

$$Sd = \sqrt{S^2_{\bar{x}_1} + S^2_{\bar{x}_2}} = \sqrt{0{,}38^2 + 0{,}31^2} = 0{,}49$$

$НСР_{05} = t_{05} \cdot S_d = 2{,}10 \cdot 0{,}49 = 1{,}02$

Так как фактическая разность $d > НСР_{05}$ ($1{,}7 > 1{,}02$), нулевая гипотеза опровергается на 5% уровне значимости.

Общий вывод: Так как доверительные интервалы для генеральной средней не перекрываются, $t_ф > t_{05}$, $d > НСР_{05}$ нулевая гипотеза опровергается на 5% уровне значимости ($H_0 \neq 0$) и принимается альтернативная гипотеза (H_A). Таким образом, на основании статистических расчетов можно сделать биологический (агрономический) вывод: разность ($d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$) между средним содержанием белка у сорта яровой пшеницы Саратовская 29 (вариант 1) и Безенчукская 98 (вариант 2) существенна с вероятностью 95%.

Сравнение двух вариантов с зависимыми выборками при количественной изменчивости

При сравнении вариантов с зависимыми или сопряженными выборками, когда единицы первой выборки связаны каким-то общим условием с единицами наблюдения второй выборки, оценивается существенность средней разности $\bar{d} = \frac{\sum d}{n}$, где: $\pm\bar{d}$ – средняя разность, $\sum d$ – сумма сопряженных разностей, n – число сопряженных пар наблюдений.

Примерами с зависимыми (сопряженными) выборками являются изучение органов одного и того же растения, способы хранения в одном и том же помещении, хранилище, холодильных камерах, сравнение сопряженных лет испытаний, растений на соседних делянках и т.д.

В этом случае ошибку разности средних вычисляют *разностным методом.* Для расчета средней разности ($\pm\bar{d}$) и ошибки средней разности ($S_{\bar{d}}$) составляют сопряженные пары наблюдений и для каждой пары наблюдений определяют со своими знаками разности (d). Ошибка средней разности рассчитывается по следующей формуле: $S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum(d-\bar{d})^2}{n(n-1)}}$ или $S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum d^2 - (\sum d)^2 : n}{n(n-1)}}$,

где: $S_{\bar{d}}$ – ошибка средней разности, d – разность между парой наблюдений, $\bar{d}$ – средняя разность,

$\sum d^2$ – сумма квадратов разностей, $(\sum d)^2$ – квадрат суммы разностей, n – число сопряженных пар наблюдений.

Вторая формула более удобна, так как она упрощает расчеты.

Пример. При изучении 2-х способов хранения яблок в полиэтиленовых пакетах в одних и тех же камерах холодильника процент сохранившихся плодов составил (%,). Число пар наблюдений (n = 8). Необходимо определить, существенны ли различия в способах хранения?

Таблица 9

Без газовой среды	56	68	74	75	80	56	63	66
Газовая среда	85	73	75	95	78	85	76	74

Так как яблоки в пакетах без газовой среды и в пакетах с газовой средой хранились в одних и тех же холодильниках, то это зависимые (сопряженные) выборки. Если бы пакеты хранились в разных камерах холодильника, это были бы независимые выборки.

Решение: Оценку разности средних двух вариантов с зависимыми выборками проведем в следующей последовательности:

1. Выдвигаем нулевую гипотезу (H_0) — предположение об отсутствии реальных различий между способами хранения яблок в пакетах без газовой (вариант 1) и с газовой средой (вариант 2) и альтернативную гипотезу (H_A) — предположение о наличии различий между вариантами.

2. Выбираем доверительную вероятность *(0,95–95%)* или уровень значимости для проверки нулевой гипотезы (*0,05–5%).*

3. Выбираем критерий существенности для проверки гипотезы – *t* критерий Стьюдента.

4. Составим сопряженные пары наблюдений, найдем разности, среднюю разность и ошибку средней разности. Формулы всех статистических показателей и их значения представлены в рабочей таблице 10.

Таблица 10

Пары	Вариант 1	Вариант 2	Разность $d = X_2 - X_1$	Квадрат разности d^2
1	56	85	29	841
2	68	73	5	25
3	74	75	1	1
4	75	95	20	400
5	80	78	–2	4
6	56	85	29	841
7	63	76	13	169
8	66	74	8	64
Суммы			$\Sigma d = 103$	$\Sigma d^2 = 2345$
			$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = 12{,}88$	–

1. Ошибку средней разности удобнее рассчитать по формуле:

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum 2345 - \frac{(103)^2}{8}}{8 \cdot (8-1)}} = 4{,}26$$

2. Критерий существенности (t-фактическое) $t_{ф} = \frac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}} = \frac{12{,}88}{4{,}26} = 3{,}02$

3. Табличное значение критерия Стьюдента на 5% и 1% уровнях значимости для зависимых выборок находим по таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы
$n - 1 = 8 - 1 = 7$ $t_{05} = 2{,}37$ $t_{01} = 3{,}50.$

Сравниваем фактическое значение критерия t-Стьюдента с табличным на 5% и 1% уровнях значимости. Так как $t_{ф} > t_{05}$ $(3{,}02>2{,}37)$ и $t_{ф} < t_{01}$ $(3{,}02<3{,}50)$, приходим к выводу: нулевая гипотеза с вероятность 95% отвергается ($H_0 \neq 0$), а при более строгой оценке с вероятностью 99% – принимается ($H_0 = 0$).

4. Проведем проверку нулевой гипотезы по величине наименьшей существенной разности (*НСР*) на 5%- и 1%-ном уровнях значимости:

$$НСР_{05} = t_{05} \cdot S_{\bar{d}} = 2{,}37 \cdot 4{,}26 = 10{,}1\% \qquad НСР_{01} = t_{01} \cdot S_{\bar{d}} = 3{,}5 \cdot 4{,}26 = 14{,}9\%$$

Проведем сравнение фактической разности с НСР: так как $\bar{d} \succ НСР_{0,5}$ (12,88>10,1), $\bar{d} \prec НСР_{0,1}$ (12,88<14,9), приходим к аналогичному выводу: нулевая гипотеза с вероятность 95% отвергается ($H_0 \neq 0$), а при более строгой оценке с вероятностью 99% – принимается ($H_0 = 0$).

<u>Общий вывод:</u> С вероятностью 95% можно предполагать, что сохранность яблок в пакетах с газовой средой существенно выше, чем в пакетах без газовой среды, однако при более строгой оценке с вероятностью 99% различия в способах хранения яблок не существенны.

Сравнение двух вариантов с независимыми выборками при качественной изменчивости

В биологических и агрономических исследованиях часто приходится иметь дело с *качественной изменчивостью* признаков. К качественным относят такие признаки, которые не поддаются количественному измерению: разные сельскохозяйственные культуры, разные виды болезней, наличие или отсутствие признаков, разная форма и окраска семян и плодов, расщепление гибридов и т.д.

При этом вместо измерения какого либо показателя, как это имеет место при количественной изменчивости, при качественной изменчивости подсчитывают число объектов с тем или иным признаком: число подмерзших растений, число поврежденных и здоровых растений и тому подобное.

Проверка нулевой гипотезы (оценка существенности разности долей) при качественной изменчивости проводится по такой же схеме, как и для вариантов с признаками варьирующими количественно.

Основными статистическими показателями качественной изменчивости являются: доля признака (p, q), показатель изменчивости (S), коэффициент вариации (V_p) и ошибка выборочной доли (S_p).

Пример. На пришкольном опытном участке проводили исследование пораженности плодов томата фитофторой без обработки (вариант 1) и в зависимости от обработки препаратом Ордан (вариант 2) . С делянок без обработки препаратом и обработкой Орданом отобрали выборки по 200 плодов томата ($N_1=200$) и ($N_2=200$). Численность пораженных плодов фитофторой без обработки (вариант 1) составила 100, а при обработке Орданом (вариант 2) – 50.

Требуется определить, существенно ли влияние обработки томатов новым препаратом Ордан на уменьшение пораженности фитофторозом?

Решение: Оценку разности долей двух независимых вариантов при качественной изменчивости проведем в следующей последовательности:

1. Выдвигаем нулевую гипотезу (H_0) — предположение об отсутствии реальных различий между долей пораженных плодов томата без обработки (вариант 1) и обработкой препаратом Ордан

(вариант 2) и альтернативную гипотезу (H_A) — предположение о наличии различий между вариантами.

2. Выбираем доверительную вероятность *(0,95–95%)* или уровень значимости для проверки нулевой гипотезы (*0,05–5%*).

3. Выбираем критерий существенности для проверки гипотезы — *t* критерий Стьюдента.

4. Рассчитываем статистические характеристики (показатели) для каждого варианта. Формулы всех статистических показателей и их значения представлены в рабочей таблице 11.

Таблица 11

Рабочая таблица

Статистические показатели	Без обработки (вариант 1)	Обработка Орданом (вариант 2)
Объем выборки N	$N_1 = 200$ *томатов*	$N_2 = 200$ *томатов*
Число пораженных плодов n_1	$n_1 = 100$	$n_1 = 50$
Число здоровых плодов n_2	$n_2 = 100$	$n_2 = 150$
Доля больных $p_1 = \frac{n_1}{N_1}$	$p_1 = \frac{100}{200} = 0{,}5$ или 50%	$p_2 = \frac{50}{200} = 0{,}25$ или 25%
Доля здоровых $q_1 = 1 - p_1$	$q_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ или 50%	$q_2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ или 75%
Показатель изменчивости $S_1 = \sqrt{p_1 \cdot q_1}$	$S_1 = \sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5} = 0{,}5$	$S_2 = \sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}43}$
Коэффициент вариации $V_1 = \frac{S_1}{S_{\max}} \cdot 100$	$V_1 = \frac{0{,}5}{0{,}5} \cdot 100 = 100\%$	$V_2 = \frac{0{,}43}{0{,}50} \cdot 100 = 86\%$
Ошибка доли $S_{p_1} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{N_1}} =$	$\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{200}} = 0{,}035$	$S_{p_2} = \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{200}} = 0{,}031$
95% доверительный интервал $p \pm t_{05} \cdot S_p =$	$0{,}5 \pm 1{,}98 \cdot 0{,}035 = 0{,}43 \div 0{,}57$	$0{,}25 \pm 1{,}98 \cdot 0{,}031 = 0{,}19 \div 0{,}31$

Оценку существенности разности между долями при качественной изменчивости можно провести, как и для количественной изменчивости, тремя способами:

а) интервальным методом:

В таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы для каждой выборки $N - 1 = 200 - 1 = 199$ находим критерий Стьюдента на 0,5% уровне значимости t_{05} = 1,98.

а) с помощью доверительного интервала для генеральной доли:

Рассчитываем 95% доверительный интервал генеральной доли:

– для первого варианта: $p_1 \pm t_{05} \cdot Sp_1 = 0{,}43 \div 0{,}57$. Данный доверительный интервал показывает, что в генеральной совокупности (в нашем случае на всем участке, где не проводилась борьба с фитофторозом) доля пораженных плодов томатафитофоторозом с вероятностью может быть в интервале от 0,43 до 0,57 или от 43% до 57% .

– для второго варианта: $p_2 \pm t_{05} \cdot Sp_2 = 0{,}19 \div 0{,}31$ – доля пораженных плодов томата фитофторозом при обработке препаратом Ордан в генеральной совокупностью с вероятностью 95% может быть в интервале от 0,19 до 0,31 или от 19% до 31%.

Так как доверительные интервалы для генеральных долей не перекрываются, следовательно, нулевая гипотеза отвергается ($H_0 \neq 0$)

б) по критерию существенности *($t_ф$):* фактическое значение критерия существенности рассчитываем по формуле:

$$t_ф = \frac{|p_2 - p_1|}{\sqrt{S_{p_1}^2 + S_{p_2}^2}} = \frac{d}{S_d} = \frac{|0{,}25 - 0{,}50|}{\sqrt{0{,}035^2 + 0{,}031^2}} = \frac{0{,}25}{0{,}046} = 5{,}43$$

Табличное значение критерия Стьюдента для двух независимых выборок находим по таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы $N_1 + N_2 - 2 =$

200 + 200 – 2 = 398 $\quad t_{05} = 1{,}98 \quad t_{01} = 2{,}63$

Сопоставляя фактическое значение критерия существенности с табличным, приходим к выводу, что $t_ф > t_{01} > t_{05}$, и поэтому нулевая гипотеза отвергается не только с вероятностью 95%, но и при 99% вероятности ($H_0 \neq 0$). Следовательно, различия между вариантами существенны.

в) по наименьшей существенной разности (НСР)

Табличное значение критерия Стьюдента для двух независимых выборок находим в таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы $N_1 + N_2 - 2 =$

$200 + 200 - 2 = 398$ $\quad t_{05} = 1{,}98$ $\quad t_{01} = 2{,}63$

Ошибка разности S_d рассчитана при нахождении критерия существенности, она равна $S_d = 0{,}046$; умножаем это значение на табличное значение критерия t-Стьюдента и рассчитываем:

$HCP_{05} = t_{05} \cdot S_d = 1{,}98 \cdot 0{,}046 = 0{,}09;$

$HCP_{01} = t_{01} \cdot S_d = 2{,}63 \cdot 0{,}046 = 0{,}12$

Так как фактическая разность $d > HCP_{05}$ (0,25>0,09), $d > HCP_{01}$ (0,25>0,12), поэтому, как и при сравнении по критерию существенности, нулевая гипотеза отвергается с вероятностью 99% и принимается альтернативная гипотеза — предположение значимости различий между вариантами.

Общий вывод: Так как доверительные интервалы для генеральной средней не перекрываются, $t_ф > t_{01}$, $d > HCP_{01}$ нулевая гипотеза опровергается на 1% уровне значимости ($H_0 \neq 0$) и принимается альтернативная гипотеза (H_A). Таким образом, на основании статистических расчетов можно сделать биологический (агрономический) вывод: обработка томатов препаратом Ордан с вероятностью 99% (ошибка 1%) приводит к существенному снижению пораженности плодов томата фитофторозом.

Во всех представленных примерах показано, что нулевая гипотеза проверяется с помощью доверительных интервалов, критерия существенности и величины наименьшей существенной разности. Однако в реальной ситуации исследователь может ограничиться проверкой гипотезы, используя только два из трех методов. Все три метода применяются одновременно, если по двум методам получаем противоречивые выводы, например: по доверительным интервалам H_o принимается, а по критерию существенности $t_ф$ нулевая гипотеза отвергается, тогда необходимо проверить H_o с помощью наименьшей существенной разности *НСР*.

Дисперсионный анализ

Для проверки нулевой гипотезы результатов исследований с числом вариантов более двух с помощью общепринятых методов доверительные интервалы, критерии существенности использовать неудобно, так как для каждого варианта необходимо вычислять свою ошибку, свои доверительные интервалы, что усложняет как процедуру расчетов, так и оценку существенности разности средних. Для статистической обработки таких опытов лучшим методом является *дисперсионный анализ*, предложенный английским ученым Р.Фишером. Дисперсионный анализ основан на разложении общей дисперсии статистического комплекса на составляющие компоненты (отсюда и название метода), сравнивая которые друг с другом посредством критерия Фишера (*F*-критерия), можно определить долю общей вариации изучаемого (результативного) признака, обусловленную действием на него как регулируемых, так и не регулируемых в опыте факторов. Дисперсионный анализ возник как средство обработки результатов агрономических опытов, с помощью которых выявлялись наиболее благоприятные условия для сортов сельскохозяйственных культур. Этот метод в настоящее время широко используется не только для статистической обработки результатов опытов, но и на стадии планирования различных экспериментов.

Дисперсионный анализ – раздел математической статистики, посвященный методам выявления влияния отдельных факторов на результат эксперимента. Основная задача дисперсионного анализа заключается в разложении общей вариации (изменчивости) в опыте на вариацию, обусловленную влиянием изучаемых и не изучаемых (случайных) факторов и их оценке по критерию *F*- Фишера.

Признаки биологических объектов (масса, линейные размеры, пораженность и др.) изменяются под воздействием большого числа различных факторов: осадки, влажность почвы, освещенность, режимы питания и т.д. В опыте регулируются только отдельные факторы, в этом случае они называются *изучаемыми* или *регулируемыми*, в отличие от других, которые не регулируются и которые относят к не изучаемым (случайным) факторам.

Обычно каждый регулируемый фактор испытывается серийно, в виде нескольких групп или градаций. Эти группы принято называть *вариантами*. К вариантам в агрономических исследованиях относятся изучаемое растение, сорт, агротехнический прием или их сочетание. Например, изучаемый фактор – удобрения, тогда вариантами могут быть:

1. Без удобрений
2. $N_{60}P_{80}K_{80}$
3. Навоз 20т/га + $N_{60}P_{80}K_{80}$
4. Солома 4 т/га + $N_{60}P_{80}K_{80}$

Один из вариантов обычно принимается за *контроль* (стандарт), остальные варианты называются *опытными*. Совокупность контрольных и опытных вариантов образуют *схему опыта*. Если в опыте изучаются градации одного фактора, такой опыт называется *однофакторным*, если в опыте изучаются два и более факторов, такие опыты называются *многофакторными* и в зависимости от количества изучаемых факторов: двух-, трех-, четырех факторными.

При дисперсионном анализе одновременно обрабатываются данные нескольких вариантов, составляющих единый *статистический комплекс*, оформленный в виде специальной рабочей таблицы, в которой число строк равно числу вариантов (градаций результативного признака), а число столбцов соответствует числу повторностей каждого варианта. Структура статистического комплекса и его последующий анализ определяются схемой и методикой полевого опыта.

Сущностью дисперсионного анализа является одновременное расчленение общей суммы квадратов отклонений и общего числа степеней свободы на части-компоненты, которые соответствуют структуре эксперимента, и оценка значимости действия и взаимодействия изучаемых вариантов (факторов) по *F*-критерию.

Критерий Фишера представляет собой отношений дисперсий, а для нахождения дисперсий необходимо знать суммы квадратов отклонений и степени свободы. Общую вариацию или общую изменчивость признаков в простейшем опыте можно разложить на два компонента: вариацию, обусловленную влиянием изучаемых факторов (вариантов) и вариацию в результате действия не изучаемых (случайных) факторов и записать ее в общем виде:

Общая вариация = вариация между вариантами + случайное варьирование

Вариация или изменчивость характеризуется дисперсией, а для нахождения дисперсий необходимо знать суммы квадратов отклонений и степени свободы. Следовательно, в общей форме изменчивость (вариация) признака может быть представлена выражением:

Общая вариация = вариация между вариантами + случайное варьирование

Суммы квадратов *СКО* = *СКV* + *СКЕ*
Степени свободы $N - 1 = (v - 1) + (N - v)$

Здесь: *СКО* – общая сумма квадратов отклонений – характеризует общую изменчивость в опыте; *СКV* – сумма квадратов отклонений для вариантов – характеризует изменчивость между вариантами; *СКЕ* – сумма квадратов отклонения для случайного варьирования – характеризует влияние не изучаемых (случайных факторов) или ошибку опыта. Так как сумму квадратов для случайного варьирования (*СКЕ*) можно определить по разности: *СКЕ* = *СКО* – *СКV*, ее чаще всего называют *остаточной суммой квадратов*.

N – общее число наблюдений (делянок в полевом опыте или сосудов в вегетационном опыте) определяется по следующей формуле:

$N = v \cdot n$, где v – число вариантов, n – повторность опыта (число одноименных сосудов или делянок) каждого варианта.

$N - 1$ – общее число степеней свободы; $v - 1$ – число степеней свободы для вариантов; $N - v$ – число степеней свободы для случайного варьирования или *остаточное число степеней*.

Суммы квадратов для вариантов (*СКV*) и случайного варьирования (*СКЕ*) делят на соответствующие степени свободы и получают дисперсии или средние квадраты отклонений:

дисперсия вариантов $\mathrm{S}_{\mathrm{v}}^2 = \dfrac{CKV}{v-1}$

дисперсия случайная $S_e^2 = \dfrac{CKE}{N-v}$

Эти дисперсии и используют в дисперсионном анализе (отсюда и название) для оценки значимости (существенности) действия изучаемых факторов. Оценка проводится путем сравнения дисперсии вариантов с дисперсией случайной (ошибки) по критерию

Фишера $F_{ф} = \frac{S_v^2}{S_e^2}$. За базу сравнения принимают дисперсию (средний квадрат) случайного варьирования, которая определяет случайную ошибку эксперимента. Критерий Фишера показывает, во сколько раз вариация вариантов превышает вариацию случайных факторов, проще говоря, критерий Фишера показывает, во сколько раз действие вариантов превышает действие случайных (не изучаемых) факторов. Для проверки нулевой гипотезы (H_0) по таблице (Приложение 2) находят теоретическое значение критерия F для принятого в исследовании уровня значимости с учетом числа степеней свободы для вариантов и числа степеней свободы случайного варьирования. В большинстве случаев избирают 5%-ный, а при более строгом подходе 1%-ный уровень значимости.

Далее сравнивается фактическое значение критерия $F_{ф}$ с табличным значением F_{05} или F_{01}. Нулевая гипотеза (*Ho*) сводится к предположению, что генеральные средние по вариантам равны, поэтому между средними по вариантам нет существенных различий, т.е. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \cdots = \bar{x}_k$, или $\bar{x}_1 - \bar{x}_2; \bar{x}_3 - \bar{x}_k = d = 0$. Иными словами, нулевая гипотеза исходит из того, что никакого систематического действия регулируемых факторов или вариантов на результативный признак не существует и наблюдаемые между средними значениями различия по вариантам случайны. Если $F_{ф} < F_{05}$ *или* $F_{ф} < F_{01}$, то нулевая гипотеза $H : d = 0$ не отвергается, между всеми выборочными средними нет существенных различий, и на этом проверка заканчивается. Если $F_{ф} \geq F_{05}$ *или* $F_{ф} \geq F_{01}$, то нулевая гипотеза $H : d \neq 0$ отвергается. Критерий F устанавливает только факт наличия существенных различий между средними, но не указывает между какими средними имеются эти различия. В этом случае дополнительно проводят оценку существенности частных различий по *НСР* и определяют, между какими средними имеются значимые разности.

В зависимости от условий проведения опытов применяют различные схемы (модели) дисперсионного анализа, в которых записывают на какие конкретно суммы квадратов и степени свободы расчленяют общее варьирование.

Так, например, схема (модель) дисперсионного анализа результатов экспериментов с независимыми выборками (лабораторный опыт, вегетационный опыт, полевой опыт с полной рандомизацией размещения вариантов) представляет собой следующий вид:

$CKO = CKV + CKE$

$N - 1 = (v - 1) + (N - v)$

$$S_v^2 = \frac{CKV}{v-1}$$

$$S_e^2 = \frac{CKE}{N-v}$$

$$F_ф = \frac{S_v^2}{S_e^2}$$

Эксперименты с зависимыми или сопряженными выборками (полевой и вегетационный опыт с организованными повторениями) обрабатываются по следующей схеме (модели):

$CKO = CKP + CKV + CKE$

$N - 1 = (n - 1) + (v - 1) + (n - 1)(v - 1)$

$$S_v^2 = \frac{CKV}{v-1}$$

$$S_e^2 = \frac{CKE}{(n-1)(v-1)}$$

$$F_ф = \frac{S_v^2}{S_e^2}$$

где: *CKP* – сумма квадратов для повторений; $n - 1$ – степени свободы для повторений; $(n - 1)(v - 1)$ – степени свободы для случайного варьирования.

По мере усложнения эксперимента увеличиваются источники варьирования, и поэтому в схеме дисперсионного анализа добавляются новые компоненты – суммы квадратов отклонений и степени свободы. Так, например, в двухфакторном опыте схема дисперсионного анализа будет следующей:

$CKO = CKP + CK_A + CK_B + CK_{AB} + CKE$

$N - 1 = (n - 1) + (a - 1) + (b - 1) + (a - 1)(b - 1) + (a \cdot b - 1)(n - 1)$,

где CK_A, CK_B, CK_{AB} – суммы квадратов для изучаемых факторов *A*, *B*, взаимодействия *AB*; *a*, *b* – число градаций фактора *A* и *B*.

Ясное представление о математической модели дисперсионного анализа облегчает понимание необходимых вычислительных операций. Дисперсионный анализ характеризуется строгой логичностью и последовательностью вычислительных операций. Ценность этого метода заключается в том, что он позволяет выявить суммарное действие факторов, действие каждого регулируемого в опыте фактора, а также действие различных сочетаний факторов друг с другом на результативный признак.

Правильное применение дисперсионного анализа предполагает нормальное или близкие к нормальному распределению совокупности (из которой взяты выборки, объединяемые в дисперсионный комплекс), случайное размещение вариантов в опыте и независимость (несопряженность) изучаемых вариантов. Дисперсионный анализ невозможен для простых однофакторных вегетационных и полевых опытов с однократной повторностью. При планировании наблюдений и обработке результатов следует также стремиться к тому, чтобы в группах дисперсионного комплекса находилось одинаковое или пропорциональное количество вариант (дат), что значительно облегчает дисперсионный анализ.

Статистические расчеты при дисперсионном анализе можно свести к четырем этапам:

1. Составляется рабочая таблица исходных данных, в которую записывают наименование вариантов, значения результативного признака, определяют суммы и средние по вариантам.
2. По рабочим формулам рассчитываются суммы квадратов для всех компонентов.
3. Составляется таблица дисперсионного анализа и определяется фактическое значение критерия Фишера, которое сравнивается с табличным значением критерия Фишера при установленном уровне значимости.
4. Проводится оценка существенности разности средних по вариантам по величине *НСР* и делается статистический и биологический вывод по результатам опыта.

Примеры дисперсионного анализа данных вегетационного опыта

Вегетационные опыты чаще всего представляют собой статистические комплексы, в которых независимость сопоставимых вариантов достигается регулярным перемещением сосудов на столах или вагонетках.

Независимости можно добиться и в полевых условиях, если варианты по делянкам полевого опыта размещать методом полной рандомизации. Следовательно, в вегетационных опытах и в полевых опытах с полной рандомизацией вариантов нет территориально организованных повторений. В таких случаях дисперсионный анализ данных таких экспериментов необходимо вести как для несопряженных (независимых) выборок.

Схема (модель) дисперсионного анализа данных однофакторного вегетационного опыта

$$СКО = СКV + СКЕ$$

$$N - 1 = (v - 1) + (N - v)$$

$$S_v^2 = \frac{CKV}{v-1} \qquad S_e^2 = \frac{CKE}{N-v}$$

$$F_ф = \frac{S_v^2}{S_e^2}$$

Когда в вегетационном опыте варианты объединяются в повторения, то статистический анализ проводят так же, как и для полевых опытов, поставленных методом организованных повторений.

Рассмотрим технику проведения дисперсионного анализа данных вегетационного опыта с одинаковой и разной повторностью вариантов.

Опыт с одинаковой повторностью (равномерный статистический комплекс)

Пример. В вегетационном опыте провели оценку 5 сортов фасоли ($v = 5$) по содержанию белка в зерне, все варианты имеют одинаковую повторность (по 4 сосуда) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 4$. Все сосуды в течение вегетационного периода постоянно перемещали, поэтому этот опыт относится к эксперименту с независимыми выборками.

<u>*Решение:*</u> Прежде всего, выдвигаем нулевую гипотезу $H_0 : d = 0$ т.е. все генеральные средние одинаковы, а разности между средними по вариантам в опыте обусловлены влиянием случайных факторов, то есть они статистически не существенны.

Статистический анализ проведем в 4 этапа:

1. Составляем рабочую таблицу, располагая в ней исходные данные (X) по вариантам и повторностям, определяем суммы (V), средние по вариантам ($\bar{x}_v$) и общую сумму всех значений по опыту (ΣX).

Таблица 12

Содержание белка у разных сортов фасоли, %

Варианты опыта	Повторности, *X*				Суммы **V**	Средние $\bar{x}_v$
	1	*2*	*3*	*4*		
1. Местный	35,4	37,1	36,6	35,8	144,9	36,2
2. Алиса	39,6	40,4	38,3	39,5	157,8	39,4
3. Белла	35,6	34,8	35,8	36,5	142,7	35,7
4. Вика	41,6	39,9	39,3	45,6	166,4	41,6
5. Гоша	46,2	45,4	43,8	49,9	185,3	46,3

$\Sigma X = \Sigma V = 797{,}1$

2. Вычисляем суммы квадратов отклонений по рабочим формулам. Для наглядности представлена таблица квадратов, которой можно проигнорировать, если при расчетах пользоваться специальными статистическими программами или пользоваться калькулятором с опцией М+ «Память».

Таблица 13

Таблица квадратов

Варианты опыта	X^2				V^2
	1	2	3	*4*	
1. Местный	1253,16	1376,41	1339,56	1281,64	20996,01
2. Алиса	1568,16	1632,16	1466,89	1560,25	24900,84
3. Белла	1267,36	1211,04	1281,64	1332,25	20363,29
4. Вика	1730,56	1592,01	1544,49	2079,36	27688,96
5. Гоша	2134,44	2061,16	1918,44	2490,01	34336,09

$\Sigma X^2 = 32120{,}99$ $\qquad \Sigma V^2 = 128285{,}20$

Вычисления сумм квадратов отклонений проведем в следующей последовательности:

Общее число наблюдений $N = v \cdot n = 5 \cdot 4 = 20$

Корректирующий фактор (поправка) $C = (\Sigma X)^2 : N = (797{,}1)^2 : 20 = 31768{,}4$

Суммы квадратов отклонений:

общая $СКО = \Sigma X^2 - C = (35{,}4^2 + 37{,}1^2 .. + 49{,}9^2) - C = 32120{,}99 - 31768{,}4 = 352{,}6$

вариантов $CKV = \Sigma V^2 / n - C = (144{,}9^2 + 157{,}8^2 + .. + 185{,}3^2) : 4 - 31768{,}4 = 302{,}9$

остаточная $CKE = CKO - CKV = 352{,}6 - 302{,}9 = 42{,}7$

3. После вычисления сумм квадратов составляем таблицу дисперсионного анализа

Таблица 14

Таблица дисперсионного анализа

Источник вариации	Суммы квадратов, СК	Степени свободы, γ	Дисперсия, S^2	Критерий *F*	
				факт.	05
Общая	352,6	20 – 1 = 19	–	–	–
Вариантов	302,9	5 – 1 = 4	$S_v^2 = 75{,}72$	26,57	3,06
Остаточная (ошибка)	42,7	20 – 5 = 15	$S_e^2 = 2{,}85$	–	–

Дисперсии рассчитываем по формулам для:

вариантов $S_v^2 = \frac{CKV}{v-1} = \frac{302.9}{4} = 75{,}72$

остаточная $S_e^2 = \frac{CKE}{N-v} = \frac{42{,}7}{15} = 2{,}85$

Фактическое значение критерия Фишера

$$F_{\phi} = \frac{S_v^2}{S_e^2} = \frac{75{,}72}{2{,}85} = 25{,}67$$

Теоретическое значение критерия Фишера находим по таблице (Приложение 2) исходя из 4-х степеней свободы для дисперсии вариантов (числитель) и 15 степеней для остатка (знаменатель). $F_{05} = 3{,}06$, $F_{01} = 4{,}89$

Сравниваем фактическое значение критерия Фишера с табличным и проверяем нулевую гипотезу. Так как $F_{ф} > F_{01} > F_{05}$, нулевая гипотеза отвергается $H_0 \neq 0$, в опыте между вариантами есть существенные различия между вариантами.

С помощью критерия Фишера мы установили, что в опыте в целом есть существенные различия, однако для выбора лучшего варианта и определения существенности разности любых пар наблюдений необходимо рассчитать НСР.

4. Для оценки существенности частных различий вычисляем:

ошибку опыта $s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S_e^2}{n}} = \sqrt{\frac{2{,}85}{4}} = 0{,}84$

ошибку разности $S_d = \sqrt{\frac{2S_e^2}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}85}{4}} = 1{,}19$

наименьшую существенную разность для 5%-ного и 1%-ного уровня значимости:

$HCP_{05} = t_{05} \cdot S_d = 2{,}13 \cdot 1{,}19 = 2{,}5$ $\quad$ $HCP_{01} = t_{01} \cdot S_d = 2{,}95 \cdot 1{,}19 = 3{,}5$

Значение критерия t_{05} и t_{01} берем из таблицы (Приложение 1) для остаточного числа степеней свободы 15 ($\gamma_e = N - v = 20 - 5 = 15$)

Составляем итоговую таблицу, в которую записываем средние значения по вариантам и разности по вариантам и оцениваем существенность каждой разности по величине НСР.

Таблица 15

Среднее содержание белка у разных сортов фасоли, %

Варианты опыта	Средняя, $\bar{x}_v$	Отклонения от стандарта $d = \bar{x}_{on} - \bar{x}_{st}$	Группа
1. Местный	36,2	–	–
2. Алиса	39,4	3,2*	I
3. Белла	35,7	–0,5	II
4. Вика	41,6	5,4**	I
5. Гоша	46,3	10,1**	I

$HCP_{05} = 2{,}5$ $HCP_{01} = 3{,}5$

Сравниваем разности с HCP на 5% и 1% уровне значимости, если разность средних по вариантам $d \geq HCP$, то она существенна, значима, а если d<НСР – несущественна, незначима.

В статистике принято существенные отклонения пометить *звездочками соответствующего уровня значимости.* Разности между средними, которые больше HCP_{05} считаются существенными с 5%-ным уровнем значимости и обозначаются одной звездочкой (*), больше HCP_{01} – существенными с 1%-ным уровнем значимости и обозначаются двумя звездочками (**). В нашем примере разности *3,2* больше HCP_{05}, поэтому она обозначена одной звездочкой, а разности *5,4* и *10,1* больше HCP_{01}, они обозначены двумя звездочками.

В системе Госсортоиспытания все сорта при сравнении со стандартным вариантом, контролем $(d = \bar{x}_{on} - \bar{x}_{st})$ распределяют на основе с HCP_{05} на три группы:

<u>I группа</u> $(d \geq HCP_{05})$ – отклонения средних от стандарта с положительным знаком больше HCP_{05}, опытные варианты (сорта) существенно превышают стандарт.

<u>II группа</u> $(|\pm d| < HCP_{05})$ – отклонения с положительным или отрицательным знаком не выходят за пределы HCP_{05}, как прибавка, так и снижение урожайности несущественны.

<u>III группа</u> $(|-d| \geq HCP_{05})$ – отклонения с отрицательным знаком больше по абсолютной величине HCP_{05}, снижение по сравнению со стандартом существенное.

Распределение вариантов на три группы по величине НСР целесообразно использовать и в агротехнических опытах.

<u>*Вывод:*</u> Сорт фасоли Алиса по сравнению со стандартным сортом Местный имеет существенно больше белка в зерне на 5%-ном уровне значимости, уменьшение содержания белка у сорта Белла по сравнению со стандартным сортом Местный несущественно, сорта фасоли Вика и Гоша содержат существенно больше белка на 1% уровне значимости.

После доказательства действия регулируемого фактора или факторов или их совместного действия на признак статистической достоверности, переходят, когда это необходимо, к сравнению средних по вариантам друг с другом или с другими показателями (общей средней, с принятой нормой, стандартом и т.д.).

Заключительный этап дисперсионного анализа – оценка силы влияния отдельных факторов или их совместного действия на результативный признак.

<u>Опыт с разной повторностью (неравномерный статистический комплекс)</u>

При планировании опытов и проведении наблюдений следует стремиться к тому, чтобы в группах дисперсионного комплекса находилось одинаковое или пропорциональное количество вариант (дат), что значительно облегчает дисперсионный анализ. Эксперименты, в которых все варианты имеют одинаковую повторность ($n_1 = n_2 = n_3 = n_k$), называются опытами с одинаковой повторностью, а статистические комплексы – *равномерными комплексами*. Если в экспериментах неодинаковая повторность вариантов из-за выпавших отдельных сосудов или делянок, из-за повышенной повторности стандарта (контроля), статистические комплексы относят к *неравномерным комплексам*.

<u>*Пример.*</u> Представим данные предыдущего примера, но с некоторыми особенностями: опыт с выпавшими датами. В течение вегетации из-за действия случайных факторов потеряны даты у второго и третьего вариантов. В вегетационном опыте изучается пять вариантов $v = 5$, но в отличие от предыдущего примера разная повторность вариантов: у первого – четыре $n_1 = 4$, второго – три $n_2 = 3$, третьего – два $n_3 = 2$, четвертого и пятого – четыре $n_4 = n_5 = 4$. Все сосуды в течение вегетационного периода постоянно пере-

мещали, поэтому этот опыт относится к опыту с независимыми выборками.

Решение: Прежде всего выдвигаем нулевую гипотезу $H_0 : d = 0$ т.е. все генеральные средние одинаковы, а разности между средними по вариантам в опыте обусловлены влиянием случайных факторов, то есть они статистически не существенны.

Особенностью дисперсионного анализа данных опыта с разной повторностью по вариантам является необходимость вычисления нескольких значений НСР, так как не все средние равноточны $(n_1 \neq n_k)$.

Статистический анализ проведем в 4 этапа:

1. Составляем рабочую таблицу, располагая в ней исходные данные (X) по вариантам и повторностям, определяем суммы (V), средние по вариантам ($\bar{x}_v$) и общую сумму всех значений по опыту (ΣX).

Таблица 16

Содержание белка у разных сортов фасоли, %

Варианты опыта	Повторности, *X*				Суммы **V**	Средние $\bar{x}_v$
	1	*2*	*3*	*4*		
1. Местный	35,4	37,1	36,6	35,8	144,9	36,2
2. Алиса	39,6	40,4	38,3	–	118,3	39,4
3. Белла	35,6	34,8	–	–	70,4	35,2
4. Вика	41,6	39,9	39,3	45,6	166,4	41,6
5. Гоша	46,2	45,4	43,8	49,9	185,3	46,3

$\Sigma X = \Sigma V = 685,3$

2. Вычисляем суммы квадратов отклонений по рабочим формулам.

При подсчете общего числа наблюдений (сосудов) учитываем фактическое число – опыт планировался с двадцатью сосудами, а три выпало, поэтому из общего числа отнимаем k – количество выпавших дат.

Общее число наблюдений $N = v{\cdot}n - k = 5 \cdot 4 - 3 = 17$

Поправка $C = (\Sigma X)^2/N = (685,3)^2 : 17 = 27625,6$

При вычислении сумм квадратов отклонений для вариантов необходимо иметь в виду, что в суммы вариантов V входит разное число наблюдений n.

Суммы квадратов отклонений:
общая $CKO = \Sigma X^2 - C = (35{,}4^2 + 37{,}1^2 + \dots + 49{,}9^2) - 27625{,}6 = 321{,}2$

вариантов $CKV = \left(\frac{V_1^2}{n_1} + \frac{V_2^2}{n_2} + \dots + \frac{V_k^2}{n_k}\right) - C = \left(\frac{144{,}9^2}{4} + \frac{118{,}3^2}{3} + \dots + \frac{185{,}3^2}{4}\right) - C = 272{,}7$

остаток $CKE = CKO - CKV = 321{,}2 - 272{,}7 = 48{,}5$

3. После вычисления сумм квадратов составляем таблицу дисперсионного анализа.

Таблица 17

Таблица дисперсионного анализа

Источник вариации	Суммы квадратов	Степени свободы, γ	Средний квадрат, S^2	Критерий F	
				факт.	05
Общая	321,2	17 – 1 = 16	–	–	–
Вариантов	272,7	5 – 1 = 4	68,2	16,88	3,26
Остаточная (ошибка)	48,5	17 – 5 = 12	4,04	–	–

Теоретическое значение критерия Фишера находим по таблице (Приложение 2) исходя из 4-х степеней свободы для дисперсии вариантов (числитель) и 12 степеней для остатка (знаменатель). $F_{05} = 3{,}26$, $F_{01} = 5{,}41$.

Сравниваем фактическое значение критерия Фишера с табличным и проверяем нулевую гипотезу, так как $F_ф > F_{01} > F_{05}$, нулевая гипотеза отвергается $H_0 \neq 0$, в опыте между вариантами есть существенные различия между вариантами.

С помощью критерия Фишера мы установили, что в опыте в целом есть существенные различия, однако для выбора лучшего варианта и определения существенности разности любых пар наблюдений необходимо рассчитать НСР.

4. При оценке существенности частных различий в опыте с разной повторностью рассчитываем несколько ошибок разностей и несколько наименьших существенных разностей.

а) ошибку разности и $НСР_{05}$ для сравнения вариантов с полным набором дат –средних значений первого, четвертого и пятого вариантов между собой ($n_1 = n_4 = n_5 = 4$):

$$S_d^1 = \sqrt{\frac{2S_e^2}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}4}{4}} = 1{,}42$$

$$НСР_{05}^1 = t_{05} \cdot S_d^1 = 2{,}18 \cdot 1{,}42 = 3{,}1$$

б) то же для сравнения вариантов с разной повторностью:

при сравнении средних значений второго варианта с первым, четвертым и пятым ($n_2=3,\ n_1 = n_4 = n_5 = 4$):

$$S_d^{II} = \sqrt{S_e^2 \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} = \sqrt{4{,}04 \frac{4+3}{4 \cdot 3}} = 1{,}54$$

$$НСР_{05}^{II} = t_{05} \cdot S_d^{II} = 2{,}18 \cdot 1{,}54 = 3{,}4$$

при сравнении средних значений третьего варианта с первым, четвертым и пятым ($n_3 =2,\ n_1 = n_4 = n_5 = 4$):

$$S_d^{III} = \sqrt{S_e^2 \frac{n_1 + n_3}{n_1 \cdot n_3}} = \sqrt{4{,}04 \frac{4+2}{4 \cdot 2}} = 1{,}74$$

$$НСР_{05}^{III} = t_{05} \cdot S_d^{III} = 2{,}18 \cdot 1{,}74 = 3{,}8$$

при сравнении средних значений второго варианта с третьим вариантом ($n_2 =3,\ n_3=2$):

$$S_d^{IV} = \sqrt{S_e^2 \frac{n_2 + n_3}{n_2 \cdot n_3}} = \sqrt{4{,}04 \frac{3+2}{3 \cdot 2}} = 1{,}84$$

$$НСР_{05}^{IV} = t_{05} \cdot S_d^{IV} = 2{,}18 \cdot 1{,}84 = 4{,}0$$

Значение критерия t_{05} и берем из таблицы (Приложение 1) для остаточного числа степеней свободы 15 (γ_e=N –v = 17 –5 =12).

Составляем итоговую таблицу, в которую записываем средние значения по вариантам и разности по вариантам. Так как повторности вариантов в опыте разные, в итоговой таблице в отличие от предыдущего примера, где для любых пар сравнений использовалась одна и та же $НСР_{05}$, для каждой пары сравнения проставляем свою $НСР_{05}$, учитывающую повторности вариантов.

Таблица 18

Среднее содержание белка у разных сортов фасоли, %

Варианты опыта	Повторность	Средние, $\bar{x}_v$	$d = \bar{x}_{on} - \bar{x}_{st}$	$НСР_{05}$
1. Местный	4	36,2	–	–
2. Алиса	3	39,4	3,2	3,4
3. Белла	2	35,2	–1,0	3,8
4. Вика	4	41,6	5,4	3,1
5. Гоша	4	46,3	10,1	3,1

Вывод: Сорта фасоли Алиса и Белла несущественно отличаются по содержанию белка от стандартного сорта Местный. Сорта фасоли Вика и Гоша с вероятностью 99% превосходят по содержанию белка стандартный сорт Местный.

Как видно из итоговой таблицы, с уменьшением повторности из-за выпавших дат увеличивается ошибка у второго и третьего вариантов. Если в опыте с полным набором дат (предыдущий пример) у второго варианта по сравнению с контролем была существенная прибавка, то в нашем случае прибавка несущественная ($d = 3,2$, $НСР_{05} = 3,4$).

Дисперсионный анализ данных полевого опыта с рандомизированными (организованными) повторениями

Элементарной единицей полевого опыта служит делянка — часть территории, занимаемой опытным участком, имеющая определенный размер (и площадь), предназначенная для размещения одного варианта опыта. Варианты по делянкам полевого опыта, как правило, размещаются *случайно* (по жребию). Существует два метода случайного (рандомизированного) размещения вариантов: *полная рандомизация* и *метод организованных (рандомизированных) повторений.*

Метод полной рандомизации —
4 варианта в 3-х кратной повторности:

4	2	3	4	1	2	4	3	1	2	1	3

При полной рандомизации варианты размещаются по всем делянкам полевого опыта случайно, без выделения повторений.

Метод организованных повторений —
4 варианта в 3-х кратной повторности:

I повторение				II повторение				III повторение			
1	3	4	2	3	2	4	1	1	2	4	3

При методе организованных (рандомизированных) повторений опытный участок сначала разбивают на блоки (*повторения*), а затем в каждом повторении варианты размещают по делянкам случайным образом. Повторением называется часть площади опытного участка, включающая делянки с полным набором вариантов или схемы опыта. Метод организованных (рандомизированных) повторений является наиболее распространенным в мировой практике методом размещения вариантов. При таком методе размещения вариантов при проведении дисперсионного анализа уменьшается систематическая ошибка опыта, вызванная закономерным варьированием плодородия почвы.

Если в полевых опытах варианты размещены методом полной рандомизации, то их результаты обрабатываются, как и результаты вегетационных опытов по схеме (модели) дисперсионного анализа экспериментов с независимыми (несопряженными) выборками.

В полевом опыте, проведенном методом организованных (рандомизированных) повторений, общая изменчивость результативного признака с помощью дисперсионного анализа разлагается на три части: *варьирование повторений, варьирование изучаемых вариантов* и *случайное.*

Пестрота почвенного плодородия бывает внутри повторений и между повторениями. Изменчивость плодородия почвы, обусловленная влиянием систематического (закономерного) варьирования плодородия почвы рассчитывается только лишь, если варианты в полевом опыте сгруппированы по блокам или повторениям. Изменчивость результативного признака, обусловленная пестротой почвенного плодородия внутри повторений, относится к случайным ошибкам.

Схема (модель) дисперсионного анализа данных полевого опыта с организованными повторениями

$$CKO = CKP + CKV + CKE$$
$$N - 1 = (n - 1) + (v - 1) + (n - 1)(v - 1)$$

$$S_v^2 = \frac{CKV}{v - 1} \qquad S_e^2 = \frac{CKE}{(n-1)(v-1)}$$

$$F_{\phi} = \frac{S_v^2}{S_e^2}$$

Техника проведения дисперсионного анализа данных полевого опыта такая же, как и данных вегетационного опыта.

Пример. В полевом опыте проводили оценку по урожайности пяти сортов (вариантов) озимой пшеницы $v = 5$, все варианты имеют одинаковую повторность (по 4 делянки) $n1 = n2 = n3 = n4 = n5 = 4$. Варианты в опыте размещены методом организованных повторений.

<u>Решение</u>: Прежде всего, выдвигаем нулевую гипотезу H_0: d = 0 т.е. все генеральные средние одинаковы, а разности между средними по вариантам в опыте обусловлены влиянием случайных факторов, то есть они статистически несущественны.

Статистический анализ проведем в 4 этапа:

1. Составляем рабочую таблицу, располагая в ней исходные данные (X) по вариантам и повторностям, определяем суммы (V), средние по вариантам ($\bar{x}_v$) и общую сумму всех значений по опыту (ΣX).

Таблица 19

Урожайность разных сортов озимой пшеницы, ц/га

Варианты опыта	Повторения, X				Суммы, **V**	Средние, $\bar{x}_v$
	I	II	III	IV		
1. Мироновская 808	40,5	43,2	42,8	44,1	170,6	42,6
2. Киевская	38,2	39,5	37,2	37,4	152,3	38,1
3. Саратовская 90	36,6	35,2	34,4	33,5	139,7	34,9
4. Московская 39	39,9	41,2	39,5	45,0	165,6	41,4
5. Инна	25,8	30,1	30,5	35,7	122,1	30,5
Суммы Р	181,0	189,2	184,4	195,7	750,3	37,5

Правильность расчетов проверяют по равенству: $\Sigma X = \Sigma V = \Sigma P = 750{,}3$

2. Вычисляем суммы квадратов отклонений по рабочим формулам:
общее число наблюдений $N = v \cdot n = 5 \cdot 4 = 20$
поправка $C = (\Sigma X)^2/N = (750{,}2)^2 : 20 = 28147{,}5$

Суммы квадратов отклонений:
общая $СКО = \Sigma X^2 - C = (40{,}5^2 + 43{,}2^2 + \cdot\cdot + 35{,}7^2) - 28147{,}5 = 473{,}0$
вариантов $СКV = \Sigma V^2/n - C = (170{,}6^2 + 152{,}3^2 + \cdot\cdot + 122{,}1^2) : 4 - - 28147{,}5 = 389{,}4$
повторений $СКП = \Sigma П^2/v - C = (181{,}0^2 + 189{,}2^2 + 184{,}4^2 + 195{,}7^2) : 5 - - 28147{,}5 = 24{,}4$
остаточная $СКЕ = СКО - СКV - СКП = 473{,}0 - 389{,}4 - 24{,}4 = 59{,}2$

3. После вычисления сумм квадратов составляем таблицу дисперсионного анализа:

Таблица 20

Таблица дисперсионного анализа

Источник вариации	Суммы квадратов	Доля вариации η,%	Степени свободы γ	Дисперсия S^2	Критерий F	
					факт.	05
Общая	473,0	100	N–1 =19	–	–	–
Повторений	24,4	5,2	n–1 = 3	–	–	–
Вариантов	389,4	82,3	v–1= 4	97,35	19,7	3,26
Остаточная	59,2	12,5	(n-1)(v-1) $3 \cdot 4 = 12$	4,93	–	–

С помощью дисперсионного анализа можно установить долевое влияние (η^2 – греческая буква *эта*) того или иного фактора в общей изменчивости признака, если ее принять за единицу или за 100%.

В нашем примере:

$\eta_v^2 = \frac{CKV}{CKO} \cdot 100 = \frac{389{,}4}{473{,}0} \cdot 100 = 82{,}3$ – влияние изучаемого фактора (вариантов)

$\eta_p^2 = \frac{CKP}{CKO} \cdot 100 = \frac{24{,}4}{473{,}0} \cdot 100 = 5{,}2$ – влияние повторений (систематической ошибки)

$\eta_e^2 = \frac{CKE}{CKO} \cdot 100 = \frac{59{,}2}{473{,}0} \cdot 100 = 12{,}5$ – влияние случайных (не изучаемых) факторов

$\eta_o^2 = \eta_v^2 + \eta_p^2 + \eta_e^2 = 1{,}0$ (или 100%) – влияние всех факторов

Дисперсии рассчитываем по формулам для:

вариантов = $S_v^2 = \frac{CKV}{v-1} = \frac{389{,}4}{4} = 97{,}35$

остаточная = $S_e^2 = \frac{CKE}{(n-1)(v-1)} = \frac{59{,}2}{12} = 4{,}93$

Фактическое значение критерия Фишера $F_ф = \frac{S_v^2}{S_e^2} = \frac{97{,}35}{4{,}93} = 19{,}7$

Теоретическое значение критерия Фишера находим по таблице (Приложение 2) исходя из 4-х степеней свободы для дисперсии вариантов (числитель) и 15 степеней для остатка (знаменатель).

$F_{05} = 3{,}26;\ F_{01} = 5{,}41$

Сравниваем фактическое значение критерия Фишера с табличным и проверяем нулевую гипотезу: поскольку $F_ф > F_{01} > F_{05}$, нулевая гипотеза отвергается $H_0 \neq 0$, в опыте между вариантами есть существенные различия между вариантами.

С помощью критерия Фишера мы установили, что в опыте в целом есть существенные различия, однако для выбора лучшего варианта и определения существенности разности любых пар наблюдений необходимо рассчитать НСР.

4. Для оценки существенности частных различий вычисляем:

ошибку опыта $S_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{S_e^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{4{,}93}{4}} = 1{,}11$

ошибку разности $S_d = \sqrt{\dfrac{2S_e^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 4{,}93}{4}} = 1{,}57$

наименьшую существенную разность для 5%-ного и 1%-ного уровня значимости:

$HCP_{05} = t_{05} \cdot S_d = 2{,}18 \cdot 1{,}57 = 3{,}4$ ц/га $\qquad HCP_{01} = t_{01} \cdot S_d = 3{,}06 \cdot 1{,}57 = 4{,}8$ ц/га.

Значение критерия t_{05} и t_{01} берем из таблицы (Приложение 1) для остаточного числа степеней свободы 12 ($\gamma_e = (n-1)(v-1)\ 3 \cdot 4 = 12$).

Составляем итоговую таблицу, в которую записываем средние значения по вариантам и разности по вариантам и оцениваем существенность каждой разности по величине $НСР_{05}$ и $НСР_{01}$.

Таблица 21

Средняя урожайность разных сортов озимой пшеницы, ц/га

Варианты опыта	***Средние,*** $\overline{x}_v$	Отклонения $d = \overline{x}_{on} - \overline{x}_{st}$	Группа 1.
Мироновская 808 (st)	42,6	–	–
2. Киевская	38,1	3,2	II
3. Саратовская 90	34,9	7,7**	I
4. Московская 39	41,4	6,5**	I
5. Инна	30,5	–4,4*	III

HCP_{05} = *3,4 ц/га* HCP_{01} = *4,8 ц/га*

Вывод: Прибавки урожайности сортов озимой пшеницы Саратовская 90 и Московская 39 по сравнению со стандартным сортом Мироновская существенны на 1%-ном уровне значимости, сорт Инна существенно уступает стандарту на 5%-ном уровне значимости, а сорт озимой пшеницы Киевская несущественно отличается от стандарта.

Корреляционно-регрессионный анализ

В природе многие признаки связаны друг с другом, изменение одного признака приводит к изменению другого. Растения, животные и микроорганизмы в процессе развития постоянно взаимодействуют с факторами внешней среды, изменяются под влиянием разнообразных условий существования. Поэтому в практике биологических и агрономических исследований часто возникает необходимость изучить зависимость или связь между двумя (или более) варьирующими признаками или свойствами растений и почвы, так как многие признаки находятся в определенной взаимосвязи. Прежде всего, необходимо указать, что все изучаемые признаки делятся на две группы: *независимые,* или *факториальные признаки* (аргумент), которые обозначаются буквой *X* и *зависимые,* или результативные (функция), которые изменяются под влиянием независимых признаков. Зависимые признаки обозначаются буквой *Y*. Из курса математики известны так называемые *функциональные связи,* когда каждому значению одной величины (*аргумент*) соответствует строго определенное значение другой величины (*функция*), например, зависимость площади круга от радиуса. В биологических и агрономических исследованиях такие связи практически не встречаются. Живым объектам свойственная так называемая статистическая или *корреляционная зависимость,* при которой каждому значению независимого признака соответствует не одно, а множество значений зависимого признака. Когда определенному значению независимой переменной X соответствует не одно, а множество возможных значений признака *Y,* возникают связи, обнаруживаемые лишь при массовом изучении признаков, называемые *стохастическими (вероятностными)* или *корреляционными.*

Корреляции подразделяют *по направлению, форме и числу связей.* По направлению корреляция может быть *прямой* и *обратной.* При *прямой* корреляции с увеличением значения признака X увеличивается значение признака *Y.* Например, чем выше продуктивная кустистость, тем выше урожайность, чем больше питательных элементов в почве, тем выше урожайность, чем больше длина листа, тем больше его площадь: чем лучше освещенность растений, тем интенсивнее фотосинтез и т.п.

При *обратной* корреляции с увеличением значения признака X значение признака Y уменьшается. Например, при увеличении засоренности полей или пораженности культурных растений уменьшается урожай, при постоянном увеличении массы корнеплодов свеклы уменьшается их сахаристость и т.п.

По форме корреляция бывает *прямолинейной* и *криволинейной*. При прямолинейной (линейной) связи между признаками X и Y зависимость носит линейный характер и выражается уравнением прямой линии $Y = a + bX$. При линейной зависимости одинаковые приращения аргумента X приводят к одинаковым приращениям функции Y. Когда при одинаковых приращениях аргумента X функция имеет неодинаковые изменения Y, зависимость называется криволинейной.

В зависимости от числа изучаемых признаков корреляция, может быть *простой,* когда имеется связь между двумя признаками и *множественной,* когда изучается зависимость между тремя и более признаками.

Под *регрессией* понимают изменение результативного признака (функции) Y при определенном изменении одного или нескольких независимых признаков (аргументов). Количественно связь между признаками описывается уравнением регрессии: при простой регрессии связь кратко обозначается $Y = f(X)$, а при множественной $Y = (X, Z, T \ldots)$.

Если корреляционный анализ показал наличие сильной и существенной зависимости, то уравнению регрессии можно предсказать значение результативного (зависимого) признака при определенных значениях независимого признака.

Корреляционно-регрессионный анализ широко используется:

– для планирования урожайности культур в зависимости от количества внесенных удобрений;

– для определения потерь урожая в зависимости от степени развития болезней, вредителей и сорняков;

– для прогнозирования будущего урожая по числу цветков или завязей у плодовых и овощных культур;

– для прогнозирования качества урожая по элементам погоды;

– для прогнозирования качества продуктов переработки и их хранения по качеству сырья и т.д.

Для оценки корреляционно-регрессионных зависимостей необходимо установить, какие из изучаемых признаков являются независимыми или факториальными (X), а какие зависимыми или результативными (Y). Так, например, урожай культур является результативным признаком (Y), количество питательных элементов в почве, количество выпавших осадков за определенный период, степень развития болезней будут независимыми признаками (X). Если в процессе статистической обработки их поменять местами, мы придем к абсурдным выводам о влиянии урожая культур на количество осадков.

Для оценки зависимостей у изучаемых признаков служат статистические показатели корреляции и регрессии. Рассмотрим основные статистические показатели линейной корреляции и регрессии.

Статистические показатели линейной корреляции

Для анализа корреляции и регрессии между X и Y проводят независимые парные наблюдения (n – число пар наблюдений) и составляют сопряженные пары чисел ($X_1\ Y_1$) ($X_2\ Y_2$) …. ($X_n\ Y_n$). По этим значениям определяют все показатели корреляции и регрессии.

Основным числовым показателем линейной корреляции является *коэффициент корреляции,* обозначаемый буквой r. Коэффициент корреляции рассчитывается по формуле:

$$r = \frac{\sum (X - \bar{x}) \cdot (Y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{x})^2 \cdot \sum (Y - \bar{y})^2}},$$

где: r – коэффициент корреляции; X – значение независимого признака; Y – значение функционального признака; $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние значения.

По величине коэффициента корреляции можно судить о направлении и силе или тесноте связи. Коэффициент корреляции – величина безразмерная, он изменяется в интервале от –1 до +1. Знак коэффициента корреляции указывает на направление связи: если «минус», то связь обратная, если «плюс», то положительная. При полных зависимостях, когда корреляционная связь превращается в функциональную, значение коэффициента корреляции равно для положительных связей +1, для обратных связей –1.

Чем ближе коэффициент корреляции к +1 или –1, тем теснее прямолинейная корреляционная связь; она ослабевает с приближением r к 0. Когда $r = 0$, между X и Y нет линейной связи, но криволинейная зависимость может существовать.

Считается, что при $r < |\pm 0{,}3|$ корреляционная зависимость между признаками *слабая,* $r = |\pm 0{,}3| \div |\pm 0{,}7|$ – *средняя,* а при $r \geq |\pm 0{,}7|$ – *сильная*.

Может показаться, что величина коэффициента корреляции, близкая к ± 0,5, уже достаточно высока и совпадение вариации двух признаков при этом должно быть у половины всех случаев.

Однако теория корреляции показывает, что степень сопряженности в вариации двух величин более точно измеряется квадратом коэффициента корреляции (r^2).

Квадрат коэффициента корреляции (r^2) называется *коэффициентом детерминации* и обозначается d_{yx}. Он показывает долю изменений функционального или результативного признака, которые в данном явлении зависят от изучаемого фактора.

Коэффициент детерминации является более непосредственным и прямым способом выражения зависимости одной величины от другой, и в этом отношении он предпочтительнее коэффициента корреляции. При $r = 0{,}6$ не *60%,* а только 36% изменчивости зависимой переменной Y (результативного признака) связано с изменчивостью независимой переменной X (факториального признака). Поэтому в выражении «50% колебаний в урожае вызывается колебаниями в выпадении осадков» 50% – коэффициент детерминации.

Для оценки надежности выборочного коэффициента корреляции вычисляют ошибку и критерий существенности.

Стандартную ошибку коэффициента корреляции определяют по формуле:

$$S_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}},$$

где: S_r – ошибка коэффициента корреляции; r – коэффициент корреляции;

n – число пар наблюдений.

Из этой формулы видно, что чем больше значение коэффициента корреляции и чем больше пар наблюдений, тем меньше ошибка.

Критерий существенности коэффициента корреляции рассчитывают по формуле:

$t_r = \dfrac{r}{s_r}$, где: r – коэффициент корреляции, S_r – ошибка коэффициента корреляции.

Критерий существенности коэффициента корреляции служит для проверки нулевой гипотезы ($H_0 : r = 0$) – предположения о том, что корреляционная зависимость между изучаемыми признаками в их генеральных совокупностях отсутствует, а наблюдаемая корреляция по выборке случайна.

Для проверки нулевой гипотезы после определения фактического значения критерия существенности коэффициента корреляции в таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы ($\gamma = n - 2$) находят табличное значение критерия для принятого уровня значимости, чаще всего 5%-ного. Если $t_r < t_{05}$, нулевая гипотеза принимается (H_o: $r=0$). Если $t_r \geq t_{05}$, нулевая гипотеза отвергается (H_o: $r \neq 0$): между изучаемыми признаками имеется существенная корреляционная зависимость.

Приблизительную картину, показывающую направления, формы и силы связи, можно представить на графике (рис. 6). Для построения графика по оси абсцисс откладывают значения признака *X,* по оси ординат – значения признака *Y,* и каждое наблюдение под двумя переменными отмечают точкой с координатами *(X, Y).* Такой график называют *«точечной диаграммой»* или *«корреляционным полем»*

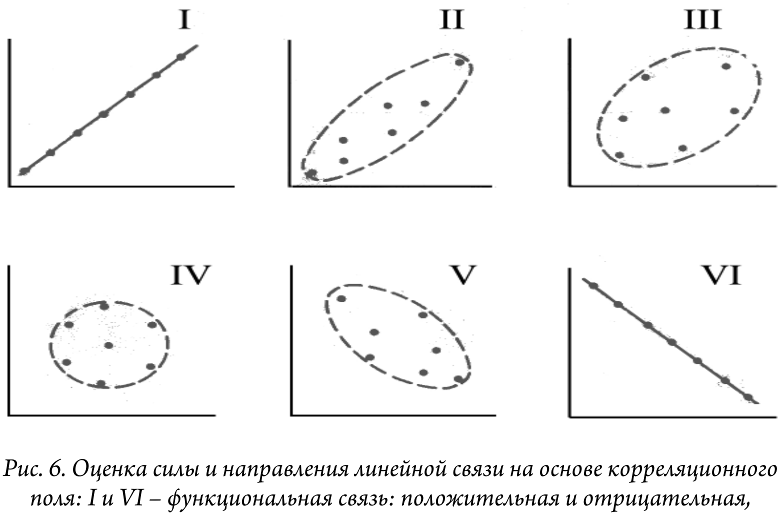


Рис. 6. Оценка силы и направления линейной связи на основе корреляционного поля: I и VI – функциональная связь: положительная и отрицательная, соответственно, r = + 1 и r = – 1; II… V-корреляционная связь: II – сильная положительная, r > 0,7; III – средняя положительная, r < 0,5; IV – нулевая, r = 0; V – средняя отрицательная, r ≈ – 0,5

Коэффициент корреляции указывает на направление и степень сопряженности в изменчивости признаков, но не позволяет судить о том, как количественно меняется результативной признак при изменении факториального на единицу измерения, что важно в познавательных и практических целях.

Для количественной оценки изучаемых связей служит *регрессионный анализ.* Его основная задача – определить уравнение прямой линии и построить теоретическую линию регрессии.

Статистические показатели линейной регрессии

Коэффициент регрессии вычисляют по формуле:

$$b_{yx} = \frac{\sum (X - \bar{x}) \cdot (Y - \bar{y})}{\sum (X - \bar{x})^2}$$

Коэффициент регрессии b_{yx} *показывает, в каком направлении и насколько изменится результативный признак Y при изменении факториального признака X на единицу измерения и выражается в единицах Y*. Коэффициент регрессии может принимать любые значения, измеряется в единицах *Y*, имеет тот же знак, что и коэффициент корреляции.

Ошибку коэффициента регрессии вычисляют по формуле:

$$s_{b_{yx}} = s_r \cdot \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{y})^2}{\sum (X - \bar{x})^2}}$$

Если определен критерий коэффициента корреляции, он может быть использован и для оценки значимости регрессии $t_r = t_b$.

Ошибку линии регрессии вычисляют по формуле:

$$s_{yx} = s_r \cdot \sqrt{\sum (Y - \bar{y})^2}$$

Ошибка линии регрессии показывает насколько теоретическая линия регрессии выборки отличается от теоретической линии регрессии в генеральной совокупности.

Корреляция может быть изображена графически в виде *линии регрессии* (рис. 7). Точечная диаграмма часто указывает на сильный разброс индивидуальных наблюдений и не позволяет с достаточной точностью определить любое значение результативного признака *Y* по заданному значению *X*. Поэтому необходимо устранить влияние случайных отклонений и найти положение теоретической линии регрессии, т.е. усреднённое течение функции при равномерном увеличении аргумента.

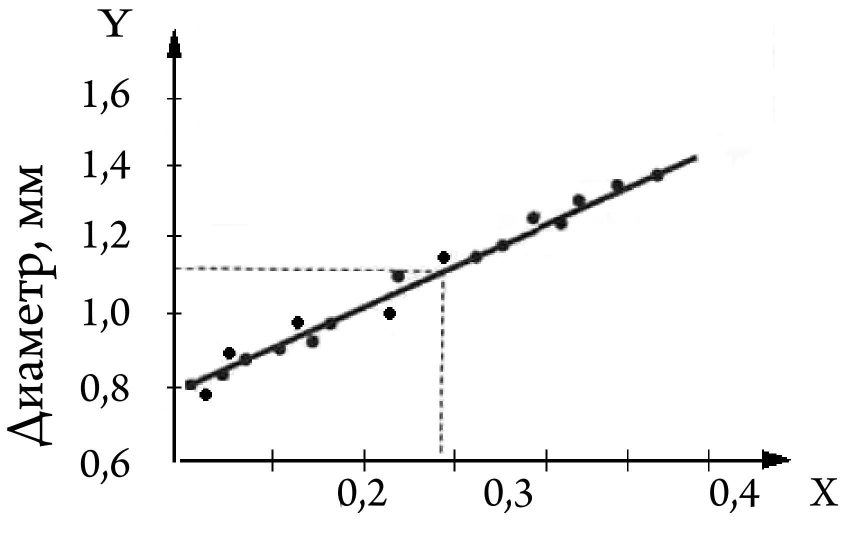


Рис. 7. Точечный график и линия регрессии

<u>*Пример.*</u> Изучается зависимость между пораженностью озимой пшеницы бурой ржавчиной (X) и ее урожайностью (Y), ц/га. Исследование проводили на десяти делянках опыта, число пар наблюдений (n = *10*). Необходимо провести корреляционно-регрессионный анализ данных пораженности бурой ржавчиной (X) и урожайностью озимой пшеницы (Y).

<u>*Решение:*</u>

1. Составляем вспомогательную таблицу, в которую записываем сопряженные пары значений, рассчитываем средние для ряда X и Y, отклонения X и Y от их средних, квадраты отклонений, произведения отклонений и их суммы.

Таблица 22

Признаки		Отклонения		Квадраты отклонений		Произведения
Y	X	$(Y-\bar{y})$	$(X-\bar{x})$	$(Y-\bar{y})^2$	$(X-\bar{x})^2$	$(Y-\bar{y})\cdot(X-\bar{x})$
51,1	20,2	2,8	–19,2	7,84	368,64	–53,76
50,3	27,4	2,0	12,0	4,0	144,00	–24,00
51,1	21,6	2,8	–17,8	7,84	316,84	–49,84
48,4	46,0	0,1	6,6	0,01	43,56	0,66
49,0	41,4	0,7	2,0	0,49	4,00	1,40
49,1	43,3	0,8	3,9	0,64	15,21	3,12
48,5	37,8	0,2	–1,6	0,04	2,56	–0,32
49,0	42,5	0,7	3,1	0,49	9,61	2,17
41,8	59,1	–6,5	19,7	42,25	388,09	–128,05
45,0	54,7	–3,3	15,3	10,89	234,09	–50,49
Суммы: 483,3	394,0	0	0	74,49	1526,6	–299,11

Число пар сравнений $n = 10$

Средние по ряду Y и по ряду X

$$\bar{y} = \sum Y : n = 483{,}3 : 10 = 48{,}3$$

$$\bar{x} = \sum X : n = 394{,}0 : 10 = 39{,}4$$

2. Определяем по формулам коэффициенты корреляции, детерминации, корреляции и их ошибки:

$$r = \frac{\sum (X-\bar{x})\cdot(Y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (X-\bar{x})^2 \cdot \sum (Y-\bar{y})^2}} = \frac{-299{,}11}{\sqrt{1526{,}6\cdot 74{,}49}} = -0{,}89$$

$$s_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}89}{10-2}} = 0{,}10$$

$$d_{yx} = r^2 = (-0{,}89)^2 = 0{,}79 \text{ или } 79\%$$

$$b_{yx} = \frac{\sum (X-\bar{x})\cdot(Y-\bar{y})}{\sum (X-\bar{x})^2} = \frac{-299{,}1}{1526{,}6} = -0{,}2 \text{ ц/га}$$

$$s_{b_{yx}} = s_r \cdot \sqrt{\frac{\sum (Y-\overline{y})^2}{\sum (X-\overline{x})^2}} = 0{,}16 \cdot \sqrt{\frac{74{,}49}{1526{,}6}} = 0{,}035$$

$$s_{yx} = s_r \cdot \sqrt{\sum (Y-\overline{y})^2} = 0{,}16 \cdot \sqrt{74{,}49} = 1{,}38$$

3. Рассчитываем критерий существенности коэффициентов корреляции и регрессии и проверяем нулевую гипотезу.

$$t_r = t_b = \frac{r}{s_r} = \frac{|-0.89|}{0{,}16} = 5{,}56$$

Теоретическое значение критерия Стьюдента на 5%-ном и 1%-ном уровнях значения находим по таблице (Приложение 1) при числе степеней свободы $\gamma = n - 2 = 10 - 2 = 8$

$$t_{05} = 2{,}31 \qquad t_{01} = 3{,}36$$

Так как $t_r = t_b > t_{01} > t_{05}$ (5,56 > 3,36>2,31), нулевая гипотеза о том, что коэффициент корреляции включает нулевое значение ($r \neq 0$), отвергается и поэтому корреляционно-регрессионная зависимость существенна с вероятностью 99%, ошибка 1%.

4. По средним значениям и коэффициенту регрессии находим уравнение теоретической линии регрессии. В уравнение $Y = \overline{y} + b_{yx} \cdot (X - \overline{x}) =$ подставляем фактические значения средних: $\overline{y} = 48{,}3$, $\overline{x} = 39{,}4$, значение коэффициента регрессии $b_{yx} = -0{,}20$.

$$Y = \overline{y} + b_{yx} \cdot (X - \overline{x}) = 48{,}3 - 0{,}2(X - 39{,}4) = 48{,}3 - 0{,}2X + 7{,}88 = 56{,}2 - 0{,}2X$$

и получаем окончательный вид уравнения $Y = 56{,}2 - 0{,}2X$. Исходя из этого уравнения, следует, что если бы растения озимой пшеницы не были поражены, урожайность была бы максимальной – 56,2 ц/га.

5. На графике наносим фактические точки по сопряженным парам наблюдений ($X_1\ Y_1$; $X_2\ Y_2$; $X_{10}\ Y_{10}$) — корреляционное поле (рис. 8).

6. По уравнению регрессии рассчитываем значения Y для экстремальных значений X (X_{min} и X_{max}):

Y при $X_{min} = 20{,}2$; $Y_1 = 56{,}2 - 0{,}2 \cdot 20{,}2 = 52{,}2$

Y при X_{max} $=20,2$; $Y_2 = 56,2 - 0,2 \cdot 59,1 = 44,4$

и строим теоретическую линию регрессии Y по X.

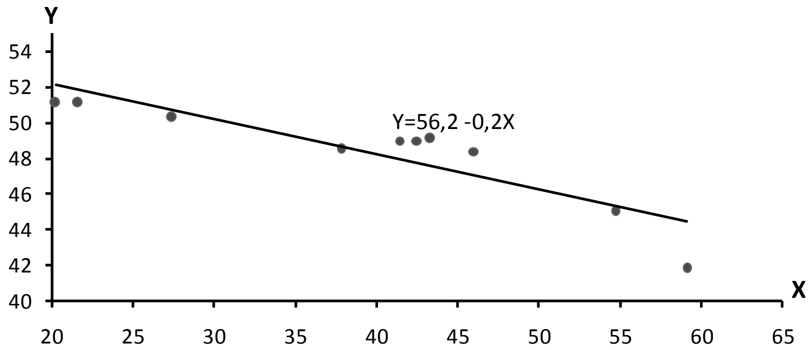


Рис. 8. Точечный график и теоретическая линия регрессии прямолинейной зависимости между урожайностью озимой пшеницы, ц/га и бурой ржавчиной, %

Вывод: Между пораженностью озимой пшеницы бурой ржавчиной и ее урожайностью установлена существенная на 5%-ном уровне значимости, тесная и обратная корреляционная зависимость ($r = -0,89$; $t_r > t_{01}$); изменение урожайности озимой пшеницы на 79% обусловлено влиянием бурой ржавчины (d_{yx} = 0,79 или 79%); увеличение пораженности озимой пшеницы бурой ржавчиной на 1% приводит к снижению ее урожайности в среднем на 0,20 ц /га.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Теоретические значения критерия Стьюдента

Степени свободы, γ	Уровень значимости		Степени свободы, γ	Уровень значимости	
	05	*01*		*05*	*01*
1	12,71	63,66	*12*	2,18	3,06
2	4,30	9,93	*14*	2,15	2,98
3	3,18	5,84	*16*	2,12	2,92
4	2,78	4,60	*18*	2,10	2,88
5	2,57	4,03	*20*	2,09	2,85
6	2,45	3,71	*25*	2,06	2,79
7	2,37	3,50	*30*	2,04	2,75
8	2,31	3,36	*50*	2,01	2,68
9	2,26	3,25	*100*	1,98	2,63
10	2,23	3,17	∞	1,96	2,58

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Теоретические значения критерия Фишера *(F)*

(γ_1 – число степеней свободы для дисперсии числителя (варианта), γ_2 – знаменателя (остатка)

F_{05} – вероятность ошибки *α = 0,05 (05%)*													
γ_2	γ_1												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	50
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,44
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,75
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,32
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,03
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,80
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,64
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65	2,50
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,60	2,55	2,40
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33	2,18
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12	1,96
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93	1,76
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,92	1,78	1,60
F_{01} – вероятность ошибки *α = 0,01 (01%)*													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	50
5	16,3	13,3	12,1	11,4	10,9	10,7	10,4	10,3	10,2	10,0	9,72	9,55	9,24
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,56	7,39	7,09
7	12,2	9,5	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,31	6,15	5,85
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,52	5,36	5,06
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	4,96	4,80	4,51
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,56	4,41	4,12
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,25	4,10	3,80
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,02	3,70	3,56
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,57	3,36	3,07
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45	3,37	3,09	2,94	2,63
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06	2,98	2,70	2,55	2,24
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,18	3,02	2,88	2,78	2,70	2,42	2,26	1,94

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Формулы

Средняя арифметическая	$\bar{x} = \dfrac{\sum X}{n}$
Взвешенная средняя арифметическая	$\bar{x} = \dfrac{\sum fX}{n}$
Дисперсия	$S^2 = \dfrac{\sum (X - \bar{x})^2}{n-1}$
Коэффициент вариации	$V = \dfrac{S}{\bar{x}} \cdot 100$
Ошибка выборочной средней	$S_{\bar{x}} = \dfrac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{S^2}{n}}$
Относительная ошибка выборочной средней	$E = \dfrac{S_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100$
Нормальное распределение	$Y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}$
Коэффициент вариации качественного признака	$V_p = \dfrac{S}{S_{\max}} \cdot 100$
Коэффициент корреляции	$r = \dfrac{\sum (X - \bar{x}) \cdot (Y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{x})^2 \cdot \sum (Y - \bar{y})^2}}$
Коэффициент регрессии	$b_{yx} = \dfrac{\sum (X - \bar{x}) \cdot (Y - \bar{y})}{\sum (X - \bar{x})^2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица случайных чисел

32533	04865	68953	02529	99970	09117
10402	34764	74397	16877	76850	82406
65692	47048	64778	29170	09732	88579
25624	88435	40555	68248	70078	67951
08928	17674	35635	99817	26803	20505
10097	37542	08422	99019	12807	80969
20636	15953	88676	98951	34072	45571
02051	05325	03529	11199	23403	18623
83491	35273	52109	50725	13746	36766
91826	65481	80124	74350	69915	09883
76520	64894	19645	09376	80157	39292
00822	35080	04436	19171	36697	35303
68665	90553	35808	98520	11805	83452
88685	99594	60970	29405	18475	90364
93785	17468	17727	77402	66252	14225
64876	24037	02560	31165	36653	74717
10805	77602	32135	45753	39885	07439
85247	28709	20344	68607	27732	98083
58401	64960	73998	67851	77817	11062
34113	51748	90324	23356	09994	13586
74296	09303	70715	36147	74945	91665
33606	27659	78833	36170	42614	74818
57548	34282	17767	05431	99634	40200
67348	93433	24201	40610	76493	61368
50950	08015	77214	29148	68514	34673
24805	23209	38311	64032	66065	31060
85269	63573	73796	65813	86779	73053
28468	60935	14905	39808	06288	86507
87517	50500	52775	68711	29609	23478
79335	82391	50024	24892	83647	46852

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Список рекомендуемой литературы:

Глуховцев В.В., Кириченко В.Г., Зудилин С.Н. Практикум по основам научных исследований в агрономии. – М.: Колос, 2006. – 240 с.

Доспехов Б.А. Методика полевого опыта (с основами статистической обработки результатов исследований). – Изд. 6-е, стереотип. – Москва: Альянс, 2011. – 351 с.

Кирюшин Б.Д., Усманов Р.Р., Васильев И.П. Основы научных исследований в агрономии. М.: КолосС, 2009. – 398 с.

Моисейченко В.Ф., Заверюха А.Х., Трифонова М.Ф. Основы научных исследований в плодоводстве, овощеводстве и виноградарстве. – М.: Колос, 1994. – 382 с.

Пересыпкин В.Ф., Коваленко С.Н., Шелестова В.С., Асатур М.К. Практикум по методике опытного дела в защите растений. М.: Агропромиздат, 1989. – 176 с.

Р.Р. Усманов, Е.Т. Прошина

Особенности статистической обработки полевого опыта

Учебно-методическое пособие

Формат 60 х 90/16
Объем 6 п.л.